PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. IX - N. 21
pag. 213-228

SULL' INTEGRAZIONE DELLE EQUAZIONI LINEARI A DERIVATE PARZIALI DEL SECONDO ORDINE DI TIPO ELLITTICO (*)

LUIGI AMERIO

SVMMARIVM. — Auctor tradit rationem qua integrari possint aequationes lineares secundi ordinis, elliptici generis, directe adhibita Greeniana formula, secundum principia a PICONE invecta.

Nei suoi *Appunti di Analisi Superiore* il PICONE (1) ha mostrato come in virtù di una assai notevole interpretazione, da Lui stesso indicata, della formula di GREEN, i classici problemi al contorno della fisica-matematica vengano prospettati, per quel che riguarda la loro soluzione, da un unico punto di vista, qualunque sia l'ordine o il tipo dell'equazione lineare cui essi conducono.

La costruzione effettiva del procedimento nel quale tale interpretazione viene utilizzata per integrare un'equazione lineare del secondo ordine di tipo ellittico è stata poi da me indicata in una Memoria di prossima pubblicazione (2), di cui qui riassumo i principali risultati.

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi il 7 ottobre 1945. Il lavoro è stato eseguito presso l'Istituto Nazionale per le Applicazioni del Calcolo.

(1) M. PICONE, *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 752-765. Vedasi anche, dello stesso Autore: *Nuovi metodi risolutivi per i problemi d'integrazione delle equazioni lineari a derivate parziali e nuova applicazione della trasformata multipla di Laplace nel caso delle equazioni a coefficienti costanti.* « R. Acc. delle Scienze di Torino », 1940, pagg. 413-426.

(2) Presso gli « Annals of Mathematics ».

1. – Sia

$$E(u) = \sum a_{ik} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_k} + \sum b_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + cu = f \qquad (a_{ik} = a_{ki}) \tag{1}$$

un'equazione lineare del secondo ordine di tipo ellittico in m variabili $(x_1, \dots, x_m)$ e supponiamo le a_{ik}, b_i funzioni di classe (¹) 2 e 1 rispettivamente, le c, f continue in dominio limitato τ dello spazio S_m. Inoltre il determinante $\|a_{ik}\|$ sia unitario, ciò che manifestamente non lede la generalità.

Introdotto l'operatore differenziale aggiunto di $E(u)$:

$$E^*(u) = \sum \frac{\partial^2 (a_{ik} u)}{\partial x_i \partial x_k} - \sum \frac{\partial (b_i u)}{\partial x_i} + cu ,$$

ammettiamo che il contorno σ di τ soddisfi a quelle condizioni che assicurano la validità della formula di GREEN per ogni coppia u, w di funzioni di classe 2:

$$-\int_\tau \left\{ u E^*(w) - w E(u) \right\} d\tau = \int_\sigma \left\{ u \frac{\partial w}{\partial \nu} - w \frac{\partial u}{\partial \nu} - u w L \right\} d\sigma \tag{2}$$

dove ν è la direzione conormale (²) a σ, orientata verso l'interno di τ, e si è posto

$$L = \sum \cos (n x_i) \left\{ b_i - \sum \frac{\partial a_{ik}}{\partial x_k} \right\} ,$$

n essendo la normale a σ, orientata anch'essa verso l'interno di τ.

(¹) Sia φ una funzione definita nell'interno di un dominio τ di S_m, continua con tutte le sue derivate parziali di ordine $\leq s$. Diremo (G. ASCOLI, *Equazioni alle derivate parziali dei tipi ellittico e parabolico*, Sansoni, Firenze, 1935, pagg. 52-53) che φ è di classe s in τ se è possibile prolungare la φ e tutte le sue derivate di ordine $\leq s$ anche sul contorno σ di τ in modo da risultare continue in *tutto* τ. Diremo poi che φ è di classe sH in τ se essa e le sue derivate di ordine $\leq s$ soddisfano in tutto τ a una condizione di HÖLDER. Scriveremo H invece di 0H.

Infine diremo che una ipersuperficie di S_m è di classe s, o sH, se è definita mediante una rappresentazione (invertibile) delle coordinate dei suoi punti come funzioni di classe s o sH, di $m-1$ parametri variabili in un certo dominio, con matrice funzionale mai nulla. Più generalmente, si avrà in taluni casi (ad esempio, per le ipersuperficie chiuse) un complesso di rappresentazioni di tal tipo, in parte sovrapposte.

(²) Ricordiamo che la funzione qui indicata con il simbolo $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ non coincide, in generale, con la derivata della u secondo la direzione ν, ma è ad essa proporzionale.

Risulta allora, per la [2], se u è un integrale della [1],

$$[3] \qquad -\int_\tau u\,\mathrm{E}^*(w)\,d\tau = \int_\sigma \left\{ u\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - w\mathrm{L}\right) - w\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\} d\sigma - \int_\tau f w\, d\tau \ ,$$

classica relazione che viene dal PICONE interpretata nel modo seguente.

Si voglia, ad esempio, *risolvere per la* [1] *il problema di Dirichlet*; siano cioè assegnati nei punti di σ i valori di u. In tal caso il PICONE comincia col rilevare che

a) *se si conosce una successione* $\{v_r\}$ *di integrali dell'equazione aggiunta*

$$[4] \qquad \mathrm{E}^*(v) = 0$$

la quale sia chiusa (1) *su* σ, *dalla* [3] *si ricava il sistema di infinite equazioni di Fischer-Riesz:*

$$[5] \qquad \int_\sigma \left\{ u\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r\mathrm{L}\right) - v_r\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\} d\sigma - \int_\tau f v_r\, d\tau = 0$$

e quindi si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognita $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ *rispetto alla successione* $\{v_r\}$, *chiusa su* σ. *Resta perciò individuata nei punti di* σ *la funzione* $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ (2).

Una volta ottenuta la $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, il PICONE osserva che

b) *se si conosce una successione* $\{z_r\}$ *di funzioni di classe* 2 *in* τ *tali che la successione* $\{\mathrm{E}^*(z_r)\}$ *risulti chiusa in* τ, *dalla* [3] *si deduce il sistema di Fischer-Riesz:*

$$[6] \qquad -\int_\tau u\,\mathrm{E}^*(z_r)\,d\tau = \int_\sigma \left\{ u\left(\frac{\partial z_r}{\partial \nu} - z_r\mathrm{L}\right) - z_r\frac{\partial u}{\partial \nu}\right\} d\sigma - \int_\tau f z_r\, d\tau$$

e quindi la u *resta individuata nei punti di* τ.

---

(1) Nelle ipotesi poste, basta la chiusura rispetto alla classe delle funzioni a quadrato sommabile su σ. Negli enunciati che seguiranno ometteremo l'indicazione, facilmente ricavabile, della classe di funzioni rispetto a cui si ha la chiusura.

(2) Dedotta, in modo ben noto, dalla successione $\{v_r\}$ una equivalente successione $\{\bar{v}_r\}$ ortogonale e normale su σ, dalle [5], in cui si ponga $\bar{v}_r$ in luogo di v_r, si ricavano i valori $\bar{c}_r$ dei coefficienti di Fourier dell'incognita $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ rispetto alla successione $\{\bar{v}_r\}$; ne segue $\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \Sigma \bar{c}_r \bar{v}_r$.

In modo analogo si ragiona per il problema di NEUMANN, nel quale la successione $\}v_r\{$ di integrali della [4] deve esser tale che risulti chiusa, su σ, la successione $\left\{\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r \mathrm{L}\right\}$. Se infine si suppone assegnata su una parte, σ_1, di σ la u, nella rimanente parte, σ_2, la derivata conormale $\frac{\partial u}{\partial \nu}$, si richiede la chiusura, su σ, della successione $\}t_r\{$ ottenuta ponendo $t_r = -v_r$ nei punti di σ_1, $t_r = \frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r \mathrm{L}$ nei punti di σ_2.

Come si vede, la risoluzione dei problemi considerati, mediante le proposizioni *a*) e *b*) viene effettuata in due tempi successivi. Possiamo però indicare una terza proposizione, in virtù della quale le funzioni incognite possono determinarsi contemporaneamente.

Per questo cominciamo col ricordare che, come ha già rilevato il PICONE [1], la teoria usualmente esposta degli sviluppi in serie di funzioni ortogonali e normali in un dominio appartenente allo spazio S_m continua a valere anche se le funzioni considerate non sono definite in un solo dominio a m dimensioni, ma in più insiemi $\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_k$, aventi ciascuno un proprio numero $\leqslant m$ di dimensioni. Gli eventuali punti comuni a due, o più, di questi insiemi vanno considerati distinti e così pure saranno distinte, in tali punti, le definizioni delle funzioni. Seguendo il PICONE, se $g_1, \dots, g_k$ sono funzioni definite negli insiemi $\mathrm{I}_1, \dots, \mathrm{I}_k$, assumeremo tali funzioni come componenti di un vettore $\boldsymbol{g}$ dello spazio S_k. Se $\boldsymbol{g}$ e $\boldsymbol{\omega}$ sono due di tali vettori diremo poi loro *prodotto integrale*, e lo indicheremo col simbolo $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\omega})$, la somma

$$[7] \qquad (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\omega}) = \sum_1^k{}_h \int_{\mathrm{I}_h} g_h \omega_h \, d\mathrm{I}_h \, .$$

Infine, dati il vettore $\boldsymbol{g}$ e una successione di vettori $\}\boldsymbol{\omega}_r\{$, i numeri $c_r = (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{\omega}_r)$ si chiameranno i *coefficienti di Fourier* di $\boldsymbol{g}$ rispetto alla successione $\}\boldsymbol{\omega}_r\{$.

Ad esempio, possiamo considerare un dominio τ di S_m e una (o più) ipersuperficie σ e definire una successione $\}\boldsymbol{\omega}_r\{$ di vettori le cui

---

(1) M. PICONE, *Vedute unitarie sul calcolo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali della fisica-matematica*, «Atti del I Convegno di Mat. applicata», Roma, 1936; *Appunti di Analisi Superiore*, Rondinella, Napoli, 1940, pagg. 632-634.

componenti, su τ e su σ, saranno due successioni di funzioni $\{\omega'_r\}$ e $\{\omega''_r\}$, definite rispettivamente su τ e su σ.

I vettori $\boldsymbol{\omega}_r$ si diranno *ortogonali* e *normali* se risulterà

$$(\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_s) = \int_\tau \omega'_r \omega'_s d\tau + \int_\sigma \omega''_r \omega''_s d\sigma = \begin{cases} 1 & \text{per } r = s \ , \\ 0 & \text{per } r \neq s \ , \end{cases}$$

e a un vettore $\boldsymbol{g}$, di componenti g' e g'', verrà a corrispondere lo sviluppo in serie di FOURIER $\sum c_r \boldsymbol{\omega}_r$, intendendosi con tale simbolo, nei punti di τ, la serie $\sum c_r \omega'_r$ e, nei punti di σ, la serie $\sum c_r \omega''_r$. Inoltre se i numeri $(\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g})$, $(\boldsymbol{\omega}_r, \boldsymbol{\omega}_r)$ sono finiti, la serie $\sum c_r^2$ è convergente e si ha

$$\text{[8]} \qquad \sum c_r^2 \leqslant (\boldsymbol{g}, \boldsymbol{g}) = \int_\tau g'^2 d\tau + \int_\sigma g''^2 d\sigma \ .$$

Perciò le due serie

$$\sum c_r \omega'_r \ , \qquad \sum c_r \omega''_r$$

convergono in media su τ e su σ rispettivamente, come risulta dal teorema di FISCHER-RIESZ, avendosi

$$\int_\tau \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega'_r\right)^2 d\tau \leqslant \int_\tau \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega'_r\right)^2 d\tau + \int_\sigma \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega''_r\right)^2 d\sigma = \sum_p^q {}_r\, c_r^2 \ ,$$

$$\int_\sigma \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega''_r\right)^2 d\sigma \leqslant \int_\tau \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega'_r\right)^2 d\tau + \int_\sigma \left(\sum_p^q {}_r\, c_r \omega''_r\right)^2 d\sigma = \sum_p^q {}_r\, c_r^2 \ .$$

La successione di vettori $\{\boldsymbol{\omega}_r\}$ si dirà poi *chiusa* se l'unico vettore $\boldsymbol{g}$ ortogonale a tutti i vettori $\boldsymbol{\omega}_r$ è il vettore nullo (cioè di componenti nulle, ovunque o quasi ovunque a seconda che le funzioni si suppongano continue o no). Inoltre, se la successione $\{\boldsymbol{\omega}_r\}$ è chiusa, nella [8] vale il segno $=$ e le serie $\sum c_r \omega'_r$, $\sum c_r \omega''_r$ convergono in media, in τ e σ rispettivamente, a g', g''.

Ciò premesso e considerando, ad esempio, il problema di DIRICHLET, si ha, per la [3],

$$-\int_\tau u\, \mathrm{E}^*(w)\, d\tau + \int_\sigma \frac{\partial u}{\partial \nu} w\, d\sigma = \int_\sigma u \left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - \mathrm{L}w\right) d\sigma - \int_\tau f w\, d\tau \ .$$

Definito allora un vettore g di componenti $g' = u$, $g'' = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, e un vettore φ di componenti $\varphi' = -E^*(w)$, $\varphi'' = w$, si ha, per la [7],

$$[9] \qquad (g, \varphi) = \int_\sigma u\left(\frac{\partial w}{\partial \nu} - Lw\right) d\sigma - \int_\tau f w \, d\tau$$

cioè è noto il prodotto integrale dei vettori g, φ.

Ne segue (1):

c) se si conosce in τ una successione di funzioni $\{w_r\}$ tali che la successione di vettori $\{\varphi_r\}$, di componenti $\varphi'_r = -E^*(w_r)$, $\varphi''_r = w_r$, sia chiusa, dalla [9] si ricava il sistema di Fischer-Riesz:

$$[10] \qquad (g, \varphi_r) = \int_\sigma u\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - L w_r\right) d\sigma - \int_\tau f w_r \, d\tau$$

cioè si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognito vettore g rispetto alla successione $\{\varphi_r\}$. Risulta perciò determinato il vettore g e quindi le sue componenti u in τ, $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ in σ (2).

Analoghi enunciati valgono per gli altri problemi al contorno.

Si presenta ora la questione di costruire le successioni $\{v_r\}$, $\{z_r\}$ e $\{w_r\}$. Tale questione è stata risolta nella Memoria i cui principali risultati formano l'oggetto della presente Nota.

Come vedremo, mentre la costruzione effettiva delle funzioni $\{v_r\}$ si presenta, in generale, assai ardua, le funzioni w_r sono semplicissime, potendosi prendere, ad esempio, $w_r = x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_i = 0, 1 \ldots$. Inoltre le funzioni w_r ottenute godono della proprietà che la successione $E^*(w_r)$ risulti chiusa in τ: si può perciò assumere $z_r = w_r$.

(1) Durante la redazione di questo lavoro non mi era noto che il Prof. PICONE, come Lui stesso mi comunica, aveva già rilevata (in una conferenza tenuta nel 1948 ma non pubblicata) l'esistenza della proposizione c) e degli analoghi enunciati per i problemi al contorno relativi a equazioni lineari di qualsivoglia ordine e tipo.

(2) Dedotta in modo noto dalla successione $\{w_r\}$ una equivalente successione $\{\overline{w}_r\}$ tale che la corrispondente successione di vettori $\{\overline{\varphi}_r\}$, di componenti $\overline{\varphi}'_r = -E^*(\overline{w}_r)$, $\overline{\varphi}''_r = \overline{w}_r$ sia ortogonale e normale e detto $\overline{c}_r$ il valore del secondo membro della [10], in cui si ponga $\overline{w}_r$, $\overline{\varphi}_r$ in luogo di w_r, φ_r, risulta $u \sim \Sigma\, \overline{c}_r E^*(\overline{w}_r)$, $\frac{\partial u}{\partial \nu} \sim \Sigma\, \overline{c}_r \overline{w}_r$.

Osserviamo infine che mentre, come facilmente si dimostra, le proposizioni *a*), *c*) presuppongono l'unicità della soluzione del problema considerato, le successioni $\}v_r\{$, $\}w_r\{$ che indicheremo permettono di ottenere in ogni caso la soluzione. Mediante tali successioni è stato inoltre risolto, nella sua forma più generale, il problema misto.

2. - Un primo procedimento per integrare l'equazione [1], supponendola a coefficienti costanti, si trova indicato in un mio lavoro di recente pubblicazione (1). Tale procedimento si basa sulla conoscenza della soluzione fondamentale della [4] (ben nota trattandosi di un'equazione a coefficienti costanti), e si può estendere a numerosi altri problemi al contorno relativi a equazioni lineari, in particolare all'integrazione della [1], supponendone variabili i coefficienti; in esso si fa uso della successione $\}v_r\{$, che risulta esplicitamente ottenuta.

Cominciamo con l'ammettere che le funzioni a_{ik}, b_i, c, si possano prolungare in un dominio τ', contenente τ nel suo interno e avente per contorno una ipersnperficie σ' di classe 2, supponendo inoltre che in τ' le a_{ik}, b_i risultino di classe 2H, 1H rispettivamente, la c di classe H.

Supporremo inoltre che il contorno σ, di area finita, sia di tal natura che, per ogni coppia (u, w) di funzioni di classe 2 in τ, valga la formula [2] di Green. Inoltre ammetteremo che, escludendo al più da σ un insieme chiuso χ di misura (ipersuperficiale) nulla, in ogni punto M_0 di $\sigma - \chi$ esista la retta normale a σ e, assunto M_0 come iperpiano di equazione $x_m = 0$, il contorno σ, in un intorno completo di M_0, abbia equazione $x_m = \varphi(x_1, ..., x_{m-1})$, con φ funzione di classe 2.

Le condizioni ora poste sono largamente verificate nei casi pratici; si noti, in particolare, che σ può contenere anche infinite ipersuperfici distinte.

Se σ soddisfa alle condizioni indicate e se, detto M un punto mobile su σ, A(M), B(M) sono due funzioni sommabili su σ, diremo che σ, A, B appartengono all'insieme (α).

---

(1) L. Amerio, *Sull'integrazione dell'equazione* $\Delta_2 u - \lambda^2 u = f$ *in un dominio di connessione qualsiasi*, Ist. Lombardo di Scienze e Lettere, Vol. LXXVIII, 1944-45.

Un secondo insieme, (β), si definirà nel modo seguente, imponendo ulteriori condizioni a σ, A, B.

Supporremo, riguardo a σ, che gli integrali

$$J_1(R) = \begin{cases} \int_\sigma MR^{-(m-2)} d\sigma \,, & \text{per } m > 2 \,, \\ \int_\sigma |\log MR|\, d\sigma \,, & \text{per } m = 2 \,, \end{cases}$$

$$J_2(R) = \begin{cases} \int_\sigma \left| \dfrac{\partial MR^{-(m-2)}}{\partial n} \right| d\sigma \,, & \text{per } m > 2 \,, \\ \int_\sigma \left| \dfrac{\partial \log MR}{\partial n} \right| d\sigma \,, & \text{per } m = 2 \,, \end{cases}$$

risultino limitati al variare del punto R in un dominio τ' contenenente τ nel suo interno. Il significato geometrico della limitatezza di $J_2(R)$ è chiaro quando si ricordi che, detto $d\omega_{M,R}$ l'angolo secondo cui è visto dal punto R l'elemento $d\sigma$ relativo al punto M, risulta

$$J_2(R) = \int_\sigma |d\omega_{M,R}| \,.$$

Se osserviamo poi che la continuità di $J_1(R)$ nei punti di $\sigma - \chi$ è ben nota, constatiamo come le condizioni relative a σ, anche se appartenente all'insieme (β), sono assai larghe e risultano soddisfatte se σ presenta nei punti dell'insieme χ quelle singolarità che si incontrano usualmente nelle applicazioni.

Considerando ora le funzioni A(M), B(M), supponiamo la A(M) continua in tutti i punti di σ, la B(M) continua in tutti i punti di $\sigma - \chi$ e tale che, al variare di N su σ, l'integrale

$$J_3(N) = \begin{cases} \int_\sigma |B(M)|\, MN^{-(m-2)} d\sigma \,, & \text{per } m > 2 \,, \\ \int_\sigma |B(M) \log MN|\, d\sigma \,, & \text{per } m = 2 \,, \end{cases}$$

risulti funzione continua (si noti che questa condizione è soddisfatta nei punti di $\sigma - \chi$ e anche nei punti di χ, con le singolarità che si presentano nei casi pratici, se si fanno su B(M) ipotesi assai meno restrittive della continuità).

Ciò premesso, osserviamo che, in virtù delle ipotesi fatte sui coefficienti della [1], se R è un qualsiasi punto prefissato internamente a τ' e T un generico punto di τ', l'equazione $E^*(v)=0$, considerata relativamente alle coordinate di T, ammette la soluzione fondamentale [1] $F(T,R)$ (che si può ammettere soddisfi alla $E(u)=0$ come funzione di R) e valgono, per ogni soluzione u della [1] di classe 2 in τ, le formule fondamentali di GREEN:

$$\text{[11]}\quad k_m u(P) = \int_\sigma \left\{ u(M)\left(\frac{\partial F(M,P)}{\partial \nu} - F(M,P)\,L(M)\right) - F(M,P)\frac{\partial u(M)}{\partial \nu}\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)\,F(M,P)\,d\tau\ ,$$

$$\text{[12]}\quad 0 \equiv \int_\sigma \left\{ u(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - F(M,Q)\,L(M)\right) - F(M,Q)\frac{\partial u(M)}{\partial \nu}\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)\,F(M,Q)\,d\tau\ ,$$

dove k_m è una costante $\neq 0$ e dipendente solo da m, P e Q indicano rispettivamente un punto interno e un punto esterno a τ, M è il punto, di τ o di σ, rispetto alle cui coordinate si effettuano le integrazioni.

Considereremo sempre, in quel che segue, solo la totalità degli integrali della [1] per cui valgano le [11], [12], i valori $u(M)$, $\dfrac{\partial u(M)}{\partial \nu}$, su σ, intendendosi definiti, nel caso più generale, quasi ovunque, come i limiti

$$\lim_{P\to M} u(P)\ ,\quad \lim_{P\to M} \frac{\partial u(P)}{\partial \nu}\ ,$$

dove $P\to M$ lungo la conormale in M, ed essendo sommabili su σ.

Se poniamo, su σ, $u(M)=A(M)$, $\dfrac{\partial u(M)}{\partial \nu}=B(M)$, dalla [12] segue che il soddisfare all'equazione

$$\text{[13]}\quad 0 \equiv \int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - F(M,Q)\,L(M)\right) - F(M,Q)\,B(M)\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)\,F(M,Q)\,d\tau$$

---

[1] E. E. LEVI, *Sulle equazioni lineari totalmente ellittiche alle derivate parziali*, Rend. Circ. Mat. di Palermo, vol. XXIV, 1907, pagg. 275-317. Vedasi anche G. ASCOLI, *loc. cit.*, (nota n. 1, pag. 214), pagg. 70-76.

è *condizione necessaria* per tutte le coppie A, B di funzioni coincidenti rispettivamente coi valori assunti su σ da un integrale u dalla [1] e dalla derivata conormale $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

Ma tale condizione è anche *sufficiente*. Ho dimostrato infatti il seguente teorema.

I. – *Sia* A, B *una coppia di funzioni soddisfacenti alla* [13]. *Considerata la funzione* $u(\mathrm{P})$ *definita nell'interno di* τ *dall'eguaglianza*

$$[14]\qquad \begin{aligned} k_m u(\mathrm{P}) = \int_\sigma \Big\{ \mathrm{A}(\mathrm{M}) \left(\frac{\partial \mathrm{F}(\mathrm{M},\mathrm{P})}{\partial \nu} - \mathrm{F}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{L}(\mathrm{M}) \right) - \\ - \mathrm{F}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,\mathrm{B}(\mathrm{M}) \Big\}\, d\sigma - \int_\tau f(\mathrm{M})\,\mathrm{F}(\mathrm{M},\mathrm{P})\,d\tau \ , \end{aligned}$$

questa è un integrale della [1] *e inoltre, a seconda dell'insieme cui appartengono* σ, A, B, *vale l'una, o l'altra, delle proposizioni:*

a) *se* σ, A, B *appartengono all'insieme* (α), *risulta quasi ovunque, su* σ,

$$[15]\qquad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} u(\mathrm{P}) = \mathrm{A}(\mathrm{M}) \ ,$$

$$[16]\qquad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} \frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial \nu} = \mathrm{B}(\mathrm{M}) \ ,$$

dove $\mathrm{P}\to\mathrm{M}$ *lungo la conormale* ν *a* σ, *spiccata dal punto* M;

b) *se* σ, A, B *appartengono all'insieme* (β), *risulta, in tutti i punti* M *di* σ,

$$[17]\qquad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} u(\mathrm{P}) = \mathrm{A}(\mathrm{M}) \ ,$$

comunque $\mathrm{P}\to\mathrm{M}$, *e, in tutti i punti di* $\sigma - \chi$,

$$[18]\qquad \lim_{\mathrm{P}\to\mathrm{M}} \frac{\partial u(\mathrm{P})}{\partial \nu} = \mathrm{B}(\mathrm{M}) \ ,$$

dove $\mathrm{P}\to\mathrm{M}$ *lungo la conormale a* σ *in* M.

L'equazione [13] traduce perciò i DIRICHLET e di NEUMANN; inoltre ad essa ricondurremo anche il problema misto. Per risolverla, si può osservare che, indicata con $\}g_r(Q)\{$ una successione di funzioni continue, chiusa nel dominio $\tau'' = \tau' - \tau + \sigma$ (ad esempio la successione $x_1^{\alpha_1} \ldots x_m^{\alpha_m}$, con $\alpha_i = 0, 1, \ldots$), la [13] *equivale* al sistema di infinite equazioni

$$\int_{\tau''} g_r(Q)\left[\int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial F(M,Q)}{\partial \nu} - F(M,Q)\,L(M)\right) - \right.\right.$$
$$\left.\left. - F(M,Q)\,B(M)\right\} d\sigma - \int_\tau f(M)\,F(M,Q)\,d\tau\right] d\tau'' = 0 \ ,$$

cioè anche, posto

$$[19] \qquad v_r(M) = \int_{\tau''} g_r(Q)\,F(M,Q)\,d\tau'' \ ,$$

al sistema di infinite equazioni di FISCHER-RIESZ

$$[20] \qquad \int_\sigma \left\{ A(M)\left(\frac{\partial v_r(M)}{\partial \nu} - v_r(M)\,L(M)\right) - v_r(M)\,B(M)\right\} d\sigma - $$
$$- \int_\tau f(M)\,v_r(M)\,d\tau = 0 \ .$$

Se si considera ora il problema di DIRICHLET e se vale, in tale problema, per la [1] il teorema di unicità, si ha perciò, in virtù del teorema I, che la successione $\}v_r\{$ data dalla [19] è chiusa su σ e soddisfa, essendo v_r, nell'interno di τ, un integrale della [4], alle condizioni richieste dal PICONE. Supponiamo ora che il teorema di unicità non valga; in tal caso una successione $\}v_r\{$ di integrali della [4] chiusa su σ *non* può esistere, come segue immediatamente dalle [5], [11]; possiamo però affermare, per il teorema I, che le autosoluzioni sono *catterizzate* dall'essere le corrispondenti B(M) ortogonali su σ alla successione $\}v_r\{$; da tale circostanza e dalle [20] si ricava perciò, anche se manca il teorema di unicità, la risoluzione del problema. Osserviamo infine che, *se il problema non ammette soluzione, nemmeno il sistema* [20] *ammette soluzione.*

La [14] dà poi l'integrale della [1] corrispondente a una determinata coppia A, B.

Le stesse considerazioni, riferite alla successione $\left\{\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r \mathrm{L}\right\}$, valgono per il problema di NEUMANN.

Si voglia ora risolvere per la [1] il problema misto, supponendo assegnati su σ i valori di una combinazione lineare D delle u e $\frac{\partial u}{\partial \nu}$:

$$\mathrm{D} = hu + k\frac{\partial u}{\partial \nu} \tag{21}$$

con h, k funzioni note dei punti di σ, non contemporaneamente nulle, escluso al più, su σ, un insieme di misura (ipersuperficiale) nulla.

Posto, al solito, su σ, $\mathrm{A} = u$, $\mathrm{B} = \frac{\partial u}{\partial \nu}$, ammettiamo che $\sigma, \mathrm{A}, \mathrm{B}$ appartengano all'insieme (α) e che σ si possa dividere in due parti, σ_1 e σ_2, in modo che, su σ_1, la funzione $\frac{\mathrm{D}}{k}$ sia sommabile e risulti, quasi ovunque, $\left|\frac{h}{k}\right| \leqslant \mathrm{L}_1$; su σ_2 sia sommabile $\frac{\mathrm{D}}{h}$ e risulti, quasi ovunque $\left|\frac{k}{h}\right| \leqslant \mathrm{L}_2$, con $\mathrm{L}_1, \mathrm{L}_2$ costanti positive.

Si ha poi, su σ_1,

$$\mathrm{B} = -\frac{h}{k}\mathrm{A} + \frac{\mathrm{D}}{k} \tag{22}$$

e, su σ_2,

$$\mathrm{A} = -\frac{k}{h}\mathrm{B} + \frac{\mathrm{D}}{h}\,. \tag{23}$$

Dalla [20 ricaviamo allora

$$\begin{aligned}\int_{\sigma_1}\mathrm{A}\left\{\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - \left(\mathrm{L} - \frac{h}{k}\right)v_r\right\}d\sigma_1 + \int_{\sigma_2}\mathrm{B}\left\{-\frac{k}{h}\frac{\partial v_r}{\partial \nu} + \left(\frac{k}{h}\mathrm{L} - 1\right)v_r\right\}d\sigma_2 = \\ = \int_{\sigma_1} v_r\frac{\mathrm{D}}{k}\,d\sigma_1 - \int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - v_r\mathrm{L}\right)\frac{\mathrm{D}}{h}\,d\sigma_2 + \int_\tau f v_r\,d\tau\end{aligned} \tag{24}$$

e quindi, definite su σ le funzioni C e t_r ponendo

$$\mathrm{C} = \begin{cases}\mathrm{A} & \text{in } \sigma_1, \\ \mathrm{B} & \text{in } \sigma_2,\end{cases} \tag{25}$$

$$t_r = \begin{cases}\frac{\partial v_r}{\partial \nu} - \left(\mathrm{L} - \frac{h}{k}\right)v_r & \text{in } \sigma_1, \\ -\frac{k}{h}\frac{\partial v_r}{\partial \nu} + \left(\frac{k}{h}\mathrm{L} - 1\right)v_r & \text{in } \sigma_2,\end{cases} \tag{26}$$

si ricava, indicato con γ_r il secondo membro delle [24],

$$[27] \qquad \int_\sigma C\, t_r\, d\sigma = \gamma_r$$

cioè si conoscono i coefficienti di FOURIER dell'incognita C rispetto al sistema $\}t_r\{$. Viceversa, sia C una soluzione del sistema [27]. Resteranno individuate, per le [25], le A, B su σ_1, σ_2 rispettivamente. Definiamo poi la B su σ_1 e la A su σ_2 mediante le [22], [23]. Eliminando dalle [24] la funzione D mediante le [22], [23] si ricava allora che le A, B ottenute soddisfano al sistema [20] e quindi alla [13]. Per il teorema I, l'integrale della [1] dato dalla [14] soddisfa allora alle [15], [16] e quindi, per le [22], [23], alla [21].

Infine, anche per il problema misto, si ha la chiusura, su σ, dalla successione $\}t_r\{$, definita dalle [26], se vale il teorema di unicità, mentre, se tale teorema non vale, le autosoluzioni sono *caratterizzate* dall'essere le corrispondenti C ortogonali, su σ, alla successione $\}t_r\{$.

3. – Il procedimento di integrazione ora indicato non richiede l'uso della successione $\}z_r\{$; esso però ammette che si conosca esplicitamente la soluzione fondamentale F(T, R), la cui determinazione effettiva è, in generale, assai ardua. Per ovviare a tale inconveniente ho perciò indicato un secondo procedimento di integrazione della [1] [introducendo la successione $\}w_r\{$ richiesta nella proposizione *c*)], in virtù del quale l'uso di tale funzione è completamente eliminato, essendo sufficiente di conoscerne l'esistenza, ciò che avviene se i coefficienti a_{ik}, b_i, c soddisfano alle condizioni dianzi ricordate.

Per questo, poniamo nella [3], in luogo di w, le funzioni

$$w_r = x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m} \qquad (\alpha_i = 0, 1, \dots)$$

e, al solito, su σ, $u = \mathrm{A}$, $\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \mathrm{B}$.

Otteniamo in tal modo il sistema

$$[28] \quad -\int_\tau u\mathrm{E}^*(w_r)\, d\tau = \int_\sigma \left\{ \mathrm{A}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - \mathrm{L}w_r\right) - w_r \mathrm{B} \right\} d\sigma - \int_\tau f w_r\, d\tau\ ,$$

per il quale ho dimostrato il seguente teorema.

II. – *Se* A, B, u *è una terna di funzioni, le prime due sommabili su* σ *e soddisfacenti alla* [13], *la terza definita entro* τ *dalla* [14], *la stessa terna soddisfa al sistema* [28].

Viceversa, se la terna A, B, u *di funzioni, sommabili nei rispettivi insiemi di definizione, soddisfa al sistema* [28], *allora le funzioni* A *e* B *soddisfano alla* [13] *e la* u, *ove se ne alteri al più la definizione in un insieme di misura nulla, è data dalla* [14].

In virtù di questo teorema possiamo risolvere i problemi al contorno per la [1] senza ricorrere alla soluzione fondamentale.

Consideriamo infatti dapprima il problema di Dirichlet.

In tal caso è nota la A, sono incognite le u e B.

Ora, definito un vettore $\boldsymbol{g}$ di componenti $g'=u$ su τ, $g''=\mathrm{B}$ su σ e una successione di vettori $\}\varphi_r\{$, con $\varphi'_r=-\mathrm{E}^*(w_r)$, $\varphi''_r=w_r$, segue dalla [28], per la [7], che $\boldsymbol{g}$ soddisfa al sistema di infinite equazioni di Fischer-Riesz

$$[29] \qquad (\boldsymbol{g}, \varphi_r)=\int_\sigma \mathrm{A}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu}-\mathrm{L}w_r\right)d\sigma-\int_\tau f w_r\, d\tau$$

cioè si conoscono i coefficienti di Fourier dell'incognito vettore $\boldsymbol{g}$ rispetto alla successione $\}\varphi_r\{$. In virtù della [29] e dei teoremi I e II si determinano perciò *contemporaneamente* le incognite u e $\mathrm{B}=\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$.

Inoltre, se vale il teorema di unicità, la successione $\}\varphi_r\{$ è chiusa; se tale teorema non vale, le autosoluzioni sono caratterizzate dall'essere i corrispondenti vettori $\boldsymbol{g}$ ortogonali alla successione $\}\varphi_r\{$. Infine *se la soluzione non esiste, nemmeno il sistema* [29] *ammette soluzione.*

Le stesse considerazioni si possono fare per il problema di Neumann nel quale occorre considerare la successione di vettori $\}\psi_r\{$, di componenti $\psi'_r=-\mathrm{E}^*(w_r)$, $\psi''_r=-\left(\dfrac{\partial w_r}{\partial \nu}-\mathrm{L}w_r\right)$, mentre l'incognito vettore $\boldsymbol{g}$ ha le componenti $g'=u$, $g''=\mathrm{A}$.

Consideriamo ora il problema misto. In tal caso, definita, su σ, una successione di funzioni $\}l_r\{$ mediante la [26] in cui si ponga w_r in luogo di v_r, si ricava per le [22], [23], [25], [28],

$$-\int_\tau u\,\mathrm{E}^*(w_r)\,d\tau-\int_\sigma \mathrm{C}\,l_r\,d\sigma=-\int_{\sigma_1} w_r\frac{\mathrm{D}}{k}\,d\sigma_1+$$

$$+\int_{\sigma_2}\left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu}-w_r\mathrm{L}\right)\frac{\mathrm{D}}{h}\,d\sigma_2-\int_\tau f w_r\,d\tau$$

e quindi, definita la successione $\}\chi_r\{$ di vettori di componenti $\chi'_r = -E^*(w_r)$, $\chi''_r = -l_r$, si ricava, per l'incognito vettore g, di componenti $g' = u$, $g'' = C$, il sistema di infinite equazioni di FISCHER-RIESZ

$$(g, \chi_r) = -\int_{\sigma_1} w_r \frac{D}{k} d\sigma_1 + \int_{\sigma_2} \left(\frac{\partial w_r}{\partial \nu} - w_r L\right) \frac{D}{h} d\sigma_2 - \int_{\tau} f w_r d\tau$$

che risolvono il problema. Anche in questo caso infatti, per i teoremi I e II, se vale il teorema di unicità, la successione $\}\chi_r\{$ è chiusa; in caso contrario, le autosoluzioni sono *caratterizzate* dall'essere i corrispondenti vettori g ortogonali alla successione $\}\chi_r\{$.

Osserviamo infine che, in luogo della successione dei monomi $x_1^{\alpha_1} \dots x_m^{\alpha_m}$, si può assumere, sotto assai larghe condizioni, come successione $\}w_r\{$ una qualsiasi successione chiusa in un dominio τ' contenente τ nel suo intorno. Ad esempio si può porre

$$w_r = e^{2\pi i \Sigma \alpha_{k,r} \frac{x_k}{T_k}} \qquad (\alpha_{k,r} = 0, \pm 1, \dots)$$

con $T_1, \dots, T_m$ costanti positive tali che il dominio τ risulti interno a un iperparallelepipedo τ' avente gli spigoli paralleli agli assi e di lunghezze $T_1, \dots, T_m$.

In ogni caso, si ricava dal teorema II, supponendo $A \equiv B \equiv f \equiv 0$, che *se risulta, per ogni* r

$$\int_{\tau} u E^*(w_r) d\tau = 0 ,$$

la funzione u *è quasi ovunque nulla in* τ.

Se prendiamo perciò $z_r = w_r$, la successione $\}E^*(z_r)\{$ soddisfa alla condizione di chiusura richiesta nella proposizione *b*) del PICONE.