

CARLO SOMIGLIANA

IN COMMEMORAZIONE DI VITO VOLTERRA



## VITO VOLTERRA

DISCORSO COMMEMORATIVO, PRONUNCIATO NELLA PRIMA TORNATA ORDINARIA  
DEL SESTO ANNO ACCADEMICO, IL 30 NOVEMBRE 1941

da CARLO SOMIGLIANA  
*Accademico Pontificio*

*Illustre Presidente, Eminentissimi Colleghi, Signore e Signori,*

Ricordare Vito Volterra nella Pontificia Accademia delle Scienze è per me un alto onore. Lo considero anche un dovere verso la memoria di un Uomo che ho grandemente stimato e ammirato, e col quale ho avuto lunga affettuosa intimità. Più di mezzo secolo di continuata amicizia, non offuscata mai da una nube, non velata mai da un'ombra, affinità di studi, identità di tendenze e di aspirazioni scientifiche, talvolta anche collaborazione diretta, creano vincoli che lasciano un'impronta profonda nell'animo, vincoli anche salutari che nella vita confortano e sostengono.

Vito Volterra è una di quelle grandi figure della scienza che onorano il Paese ove sorgono, che onorano la generazione alla quale appartengono. Le sue ricerche, i risultati raggiunti, le grandi teorie da Lui create restano come pietre miliari sulla strada maestra della scienza mondiale.

Fu essenzialmente un uomo di scienza, che abbracciò e dominò tutto il campo vastissimo dell'Analisi matematica pura e delle sue applicazioni alla Fisica matematica, alla Meccanica, alla Fisica, alle Scienze naturali, lasciando ovunque una traccia profonda del suo ingegno acuto ed originale, con un'attività meravigliosa durata sessant'anni.

Ma accanto a queste attività fondamentali altre ne svolse che ne completano ed adornano la personalità.

Vero apostolo della Scienza percorse più volte l'Europa e l'America portando la sua parola limpida e persuasiva, ed il suo sentimento d'italianità in tutti i principali centri di coltura. A Stoccolma ed a Buenos Aires, al Rice Institute nel Texas ed alle Università di Illinois e di Princeton, a Chicago, a Madrid, a Parigi, a Bucarest, Cluj, Jassy in Romania, a Praga, a Brünn, a Bruxelles, ovunque ricercato ed onorato.

In patria fu fondatore o promotore di importanti istituzioni scientifiche: la Società italiana per il progresso delle scienze, la Società di Fisica, il Politecnico di Torino, il Comitato talassografico per lo studio dei nostri mari, l'Ufficio invenzioni e ricerche, che fu poi trasformato nell'attuale Consiglio nazionale delle ricerche.

Fuori d'Italia fu Presidente del *Bureau international des poids et mesures* dal 1921 fino agli ultimi suoi giorni; e tenne degnamente l'alta carica occupandosi assiduamente delle delicate questioni che si connettono col complesso problema delle unità di misura.

Durante la guerra mondiale dal 1915 al 1918 mise le sue cognizioni scientifiche e la sua competenza tecnica a servizio della patria su tutte le fronti dell'immano conflitto, non curante delle fatiche, non curante dei pericoli.

Quando io lo conobbi a Pisa intorno al 1880 era un giovinetto non ancora ventenne, dagli occhi chiari e pensosi, dal dolce sorriso. La sua straordinaria vigoria mentale talvolta appariva, ma raramente. Era di solito sereno, faceto, arguto, pronto all'amicizia ed alla fraterna colleganza. La sua superiorità mai non ostentava; tutti l'ammettevano senza discutere. Questi lineamenti del giovinetto ventenne si conservarono poi, con lievi varianti, nell'uomo maturo, pur fra tanti onori, pure nell'estimazione universale che lo circondava. Talchè a me sempre sembrò di rivedere in lui il collega studente ed amico dell'Università di Pisa.

Vito Volterra nacque ad Ancona il 3 maggio 1860. La città era allora assediata dalle truppe italiane ed una bomba cadde nella camera ove stava la culla del neonato, che rimase fortunatamente illeso. A due anni perdette il padre e rimaneva solo colla madre, donna di grandi virtù. Uno zio materno si prese cura dell'orfano e lo condusse seco, insieme alla madre, in varie città d'Italia. A Firenze potè poi cominciare i primi studi regolari, e la sua inclinazione per le matematiche si manifestò prestissimo. Ad undici anni già aveva appreso da sè

qualche nozione di questa scienza ed avendo letto il viaggio *Dalla terra alla luna* di Jules Verne, tentava di calcolare la traiettoria del proiettile, che doveva far uscire dalla terra gli aerei viaggiatori. A quattordici anni si dava a studiare, senza aiuto d'alcuno, l'Algebra del Bertrand, e poi il classico trattato di Calcolo differenziale ed integrale dell'eminente matematico francese.

Ma le difficoltà finanziarie urgevano e la famiglia desiderava che il giovinetto si desse alla carriera commerciale, per la quale egli non sentiva alcuna attrattiva. Un lontano cugino ingegnere (che poi doveva diventare suo suocero) chiamato per persuadere il giovinetto a darsi al commercio, ebbe la sensazione esatta della sua straordinaria attitudine alle scienze, e usò della sua influenza perchè tale inclinazione non fosse contrastata. Ma le difficoltà economiche non ammettevano libera scelta, e Vito Volterra, avendo terminato gli studi all'Istituto Tecnico, stava per entrare in una Banca. L'intervento provvidenziale di Antonio Roiti, il fisico geniale che allora insegnava all'Università di Firenze, risolse la situazione. Egli nominò il giovane Vito, che non era ancora studente universitario, suo preparatore nel laboratorio di Fisica. Difficilmente si sarebbe potuto dire che cosa egli sapesse preparare. Ma si mise subito a lavorare con ardore sotto la guida del Roiti, e si iscrisse studente alla Facoltà di Scienze naturali, non essendovi allora a Firenze Facoltà di matematica.

L'anno dopo nel 1879 il Volterra, probabilmente per consiglio dello stesso Roiti, si presentò al concorso per la Scuola Normale Superiore di Pisa e lo vinse. Si iscrisse per la laurea in Fisica; cominciava così per lui la più brillante delle carriere.

La Facoltà di Scienze di Pisa possedeva allora eminenti personalità: Riccardo Felici per la fisica, Enrico Betti per la Fisica matematica e la Meccanica celeste, Ulisse Dini per il calcolo infinitesimale e l'Analisi superiore, Giuseppe Meneghini per la Geologia. Il Volterra non si curò molto della Fisica sperimentale, ma si diede tutto alle scienze matematiche sotto la guida specialmente del Dini e del Betti, distinguendosi subito, già da studente, per notevoli pubblicazioni.

Laureatosi con lode in Fisica il 30 giugno 1882, era subito nominato assistente di Meccanica razionale e supplente del Betti.

L'anno dopo, essendo stato aperto il concorso per la cattedra di Meccanica razionale nella stessa Università di Pisa, il Volterra lo vinceva. Della Commissione esaminatrice del concorso facevano parte Francesco Brioschi, Enrico Betti, Eugenio Beltrami, le più alte personalità della scienza analitica di quel tempo. Egli entrava così nell'Università sotto i migliori auspici. Aveva allora 23 anni, e ne erano trascorsi appena sei da quando era stato nominato preparatore all'Istituto fisico di Firenze.

A Pisa rimase fino al 1893, per circa dieci anni, manifestando subito una grande attività scientifica con numerosi lavori su argomenti svariati di fisica matematica, di meccanica e di analisi. Alcune idee che poi formarono la base di ampi svolgimenti successivi e caratterizzarono l'orientamento delle sue ricerche, sono di quest'epoca. La Memoria della Società dei XL *Sulle equazioni differenziali lineari*, ove si ricerca un metodo generale di calcolo per la loro integrazione, le Note lincee sulle funzioni che dipendono da tutti i valori di altre funzioni, funzioni così dette di linee, la Memoria degli « Acta Mathematica » sulla generalizzazione della teoria delle funzioni di variabile complessa, contengono i germi di teorie che svolse in seguito e dalle quali più non si staccò fino si può dire agli ultimi giorni della sua vita. Sono pure di questa epoca le ricerche sulle equazioni fondamentali della Meccanica, sulle equazioni dell'elettrodinamica e sulle equazioni di Hertz. Nel 1892 poi comparve la grande Memoria degli « Acta Mathematica » *Sulle vibrazioni luminose nei mezzi birifrangenti*, che può dirsi un capolavoro di ricerca analitica applicata ad un fenomeno fisico e risolve esaurientemente una difficile e fondamentale questione della propagazione della luce nei mezzi birifrangenti.

Nel 1893 il Volterra è chiamato a Torino come successore di Francesco Siacci, l'artigliere scienziato che aveva tenuto in quella Università la cattedra di Meccanica superiore. Al Volterra fu affidata questa disciplina ed insieme la Meccanica razionale. Specialmente in questo ultimo insegnamento ebbe modo di mostrarsi la sua abilità didattica, naturale conseguenza della limpidezza delle sue idee, e della sua facilità di espressione. Ancor oggi molti ingegneri che lo ebbero a maestro lo ricordano con venerazione.

Il periodo torinese del nostro matematico è caratterizzato dallo studio di due fondamentali problemi, l'uno di meccanica, la variazione

delle latitudini ed i moti del polo terrestre; l'altro di analisi, le equazioni integrali ed i metodi della loro risoluzione.

La genialità del Volterra, ormai ricercatore maturo e padrone dei metodi analitici, a cui fa compiere essenziali progressi, appare in queste ricerche in tutta la sua potenza, in tutto il suo splendore. Trova una causa nuova per i moti del polo nei moti ciclici che possono avvenire nella massa terrestre, ne costruisce le equazioni differenziali e riesce alla loro integrazione con un metodo analiticamente analogo a quelli con cui Jacobi aveva risolto il problema del moto di un corpo rigido con un punto fisso.

Nel problema delle equazioni integrali e della inversione degli integrali definiti apre all'analisi un campo estesissimo di ricerche, considerando il problema da un punto di vista assai più generale di quanto era stato fatto prima ed indicando procedimenti nuovi per risolverlo, che saranno poi seguiti da tutti gli autori, che studiarono tali questioni. Per più di un ventennio i matematici di tutte le Nazioni si dedicarono a questi problemi.

Nel 1900 era scomparso a Roma Eugenio Beltrami, il geniale geometra e fisico-matematico, che aveva saputo unire alla profondità della ricerca uno speciale carattere artistico. Era naturale che la Facoltà di Roma si rivolgesse al Volterra per sostituirlo. Lo troviamo così al principio di questo secolo professore a Roma di Fisica matematica e di Meccanica celeste.

Sono di quest'epoca due avvenimenti importanti nella vita del Volterra. Il suo matrimonio con Virginia Almagià, e la sua nomina, qualche anno dopo, a Senatore del Regno d'Italia.

Il periodo romano dell'attività scientifica del nostro matematico non è stato meno fecondo dei due che l'avevano preceduto. Oltre a frequenti ritorni alle teorie già svolte ed ai loro sviluppi, comprende alcune teorie interamente nuove ed originali. La teoria classica dell'elasticità fu da lui arricchita di un capitolo di alto interesse collo studio delle deformazioni non prodotte da forze esterne, ma dovute a discontinuità di spostamenti sopra certe superfici, e che corrispondono, dal punto di vista fisico, a infiltrazioni o sottrazioni di materia per strati sottilissimi su quelle superfici. Questa teoria si presenta sotto forma semplice ed elegante e fu condotta dal suo autore fino a numerose ed intuitive verifiche sperimentali. Egli considerò specialmente

queste deformazioni nei corpi non semplicemente connessi, nei quali il fenomeno presenta caratteri speciali di semplicità e si presta a stabilire interessanti analogie con l'idrodinamica. Questa teoria può essere utilizzata anche alla risoluzione di importanti problemi tecnici, come fu dimostrato dal nostro illustre collega il prof. Colonnetti.

Altro campo nuovo di ricerche, dischiuso dal Volterra in quest'epoca, riguarda la teoria dei fenomeni così detti ereditari, quelli cioè in cui lo stato attuale di un sistema non dipende solo dalle condizioni esistenti nel momento che si considera, ma anche da tutti gli stati precedenti nei quali esso è passato. Il Volterra trovò un modo generale di porre in equazione questi problemi, ed in vari casi riuscì anche a risolverli mediante la teoria delle equazioni integrali ed integro-differenziali da lui stesso costruita. Le sue teorie analitiche ebbero così un largo campo di svolgimento, che ne mise in luce la fecondità e l'utilità.

Nell'applicazione dell'analisi ai fenomeni naturali il Volterra fino a quest'epoca non era uscito dai limiti dei fenomeni fisici e meccanici. Ragioni di parentela, verso il 1926, lo misero in stretta relazione con un valoroso zoologo, che gli suggerì di cercare se il calcolo fosse applicabile ad alcuni fatti statistici, che egli incontrava studiando le variazioni verificantesi in specie animali conviventi.

Il Volterra si appassionò subito di tali questioni e colla sua naturale genialità riuscì facilmente a costruire una teoria matematica delle fluttuazioni che si verificano nel numero degli animali di specie diverse conviventi, per effetto delle azioni che le une esercitano sulle altre.

La teoria ha poi avuto ampi sviluppi fino a poter essere considerata come una teoria matematica della *lotta per la vita*, che ovunque si manifesta negli ambienti biologici.

Anche in questo campo poi egli poté considerare i fenomeni ereditari, ed applicare la sua prediletta teoria delle equazioni integrali e e dei funzionali, quella teoria alla quale, negli ultimi anni dichiarava di essere lieto di aver dedicato mezzo secolo della sua vita.

Guidato dall'analogia meccanica riuscì anche a stabilire un principio di minimo, dal quale si deducono le equazioni delle fluttuazioni biologiche, arrivando così a stabilire una dinamica biologica analoga alla dinamica dei sistemi materiali, e stabilendo un principio analogo a quello che porta il nome di Hamilton, principio che egli chiamò della *minima azione vitale*.



Le vedute filosofiche di Maupertuis secondo le quali la Natura nelle sue manifestazioni tende a risparmiare il più possibile di ciò che essa dispensa nella realizzazione dei fenomeni, trovarono così una nuova conferma nel mondo biologico, all'infuori quindi del mondo fisico e meccanico, al quale specialmente si riferiva il matematico francese.

Ben interessante sarebbe uno studio approfondito sul Volterra come trattatista e come conferenziere, due attività che Egli ha ampiamente svolto e nelle quali ha acquistato larghe benemerienze.

I trattati hanno tutti per argomento le sue ricerche di analisi pura e ne sono una esposizione limpida che mette in luce non solo le teorie che a Lui appartengono, ma anche quelle che esse hanno prodotto e sono dovute ad altri ricercatori. Sono sei i trattati che si sono succeduti in ordine di tempo dal 1912 al 1938, alcuni riproducendo e perfezionando la materia dei precedenti. Dalle prime *Leçons sur les fonctions de lignes* e *Leçons sur les équations intégrales et les équations intégro-différentielles* del 1912 e 1913 si giunge al grande Trattato *Théorie générale des Fonctionnelles* che doveva comprendere tutte le sue teorie originate dal concetto di funzione di linea, sviluppato poi nella teoria dei funzionali e collegato collo studio delle equazioni integrali ed integro-differenziali, e alle loro applicazioni alla Meccanica ed alla Fisica matematica. Doveva essere come il quadro completo del suo pensiero analitico. Ma non ne abbiamo che il primo volume, dei tre progettati, edito nel 1936, sebbene nell'opera Egli si fosse associato un valente collaboratore e continuatore delle sue teorie, il prof. Joseph Pérès della Sorbona. Alcuni anni dopo similmente ha avuto un altro eminente collaboratore nel prof. Borislav Hostinsky della Università Masaryk di Praga per la redazione del Trattato sulle *Operations infinitesimales lineaires* del 1938, nel quale sono esposte ed estese le teorie delle sostituzioni secondo un concetto molti anni prima sviluppato nella Memoria *Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari*.

Non molto ci resta delle numerose conferenze tenute dal Volterra in tante città d'Europa e d'America, ed è doloroso poichè in esse le origini delle sue idee principali trova una spiegazione ed una illustrazione più soddisfacente allo spirito, che nelle Memorie originali. Esse sono come una storia vivente del suo pensiero scientifico. Forse la sola raccolta completa che abbiamo sono le *Trois Leçons sur quel-*

*ques progrès recents de la Physique mathématique*, tenute per la celebrazione del XX° Anniversario della fondazione della Clark University, nel 1909.

La voce di Vito Volterra, che aveva cominciato a risonare nel mondo scientifico, nel 1881, ha avuto la sua ultima eco in quest'Aula, sessan'anni dopo, nel maggio dello scorso anno. Una prescrizione medica gli aveva impedito di intervenire all'Adunanza, ma Egli inviò ugualmente il suo lavoro *Sulla degradazione dell'energia nei fenomeni ereditari*, facendo omaggio della sua ultima attività a questa Accademia, a cui lo legavano profondi sentimenti di simpatia e di gratitudine.

L'opera scientifica di Vito Volterra è grandiosa, multiforme, altamente originale, e può stare degnamente fra quelle dei maggiori matematici che la storia scientifica ricordi. Dotato di una potenza analitica meravigliosa, di un ingegno creativo fortissimo, padrone come ben pochi della tecnica più raffinata del calcolo, fornito di una coltura estesissima, costruì teorie fondamentali, e le teorie seppe applicare alle più disparate e difficili questioni.

Ebbe largo senso fisico e genialità meccanica, non perdette perciò mai nelle sue ricerche l'aderenza ai fenomeni, se pur talvolta l'analista abbia in lui sopraffatto il fisico matematico, attratto dall'eleganza e dalla stessa difficoltà dei calcoli.

Nel mondo scientifico italiano Egli può considerarsi come un continuatore dell'opera di Brioschi, di Betti, di Beltrami, di Casorati, forse anche con una larghezza di vedute ed una fecondità creativa, che raramente si trova nell'epoca classica di quei nostri grandi matematici.

Da questo esame sintetico e sommario dell'opera del nostro scienziato, credo doveroso scendere ora a qualche considerazione più particolareggiata sulla sua produzione scientifica.

La sua primissima attività fu diretta ad uno dei campi più astratti e lontani dal comune pensiero matematico. Era ancora studente e sotto l'influenza del Dini, di cui seguiva i corsi, si diede allo studio di quelle funzioni singolari, per cui non è possibile una rappresentazione geometrica, ma solo una espressione concettuale, funzioni che non si ve-

dono, ma che pur hanno notevolissime proprietà. Il Volterra arrivò subito ad un risultato importante, dimostrando l'esistenza di funzioni, la cui derivata, pur essendo limitata, non è integrabile secondo la definizione Riemanniana di integrale. Questa proprietà, così contraria alla comune classica concezione dei rapporti fra derivata ed integrale, fu una grande sorpresa nel campo scientifico, ed è stata probabilmente l'origine della nuova definizione di integrale di Lebesgue, ora largamente usata.

Ma l'influenza del Betti, di cui seguivamo le lezioni con appassionato fervore, distrasse presto il Volterra dalle ricerche Dirichletiane, e lo portò in altri campi, ove orizzonti più vasti di applicabilità ai fenomeni naturali si aprono all'ingegno del ricercatore.

Il primo dei grandi problemi di Fisica matematica, a cui si dedicò il Volterra, dopo aver studiato molte altre quistioni particolari di teoria del potenziale, di idrodinamica e di analisi pura, fu la propagazione della luce nei mezzi birifrangenti.

Esiste una meravigliosa armonia fra i fenomeni fisici e le leggi del nostro pensiero. Essa permette, dentro certi limiti, di scoprire fatti e leggi nuove dei fenomeni, senza venire con essi a diretto contatto. È questa la base della Fisica matematica ed una prova diretta, quasi tangibile, del grande potere del metodo scientifico positivo. La birifrangenza biassica è un esempio di queste scoperte; essa fu trovata col calcolo, prima che i fisici l'osservassero nei cristalli. Il matematico francese Lamé aveva in seguito tentato di rappresentare analiticamente la propagazione delle onde birifratte con la superficie d'onda di Fresnel, in analogia colla propagazione per onde sferiche dei mezzi isotropi, e ritenne di aver raggiunto lo scopo.

Riprendendo la quistione il Volterra si servì di una rappresentazione della superficie d'onda di Fresnel, mediante funzioni ellittiche, dovuta a Weber. Egli ritrovò così gli integrali di Lamé, ma colla nuova rappresentazione poté osservare che questi integrali non soddisfacevano alla condizione necessaria della monodromia. La soluzione del Lamé diveniva così illusoria. E parimenti illusoria risultava una soluzione del problema trovata da Weierstrass e pubblicata dalla Kowalewski, perchè fondata su quella di Lamé.

Il Volterra non si limita però a questa parte negativa della sua ricerca, ma attraverso a formule complicatissime riesce a trovare una

soluzione al riparo di ogni obiezione, ed a dare così l'estensione ai mezzi biassici del principio di Huygens, secondo il metodo generale proposto da Kirchhoff.

È questo un risultato che può dirsi faccia epoca nella storia della Fisica matematica.

In una direzione analoga si svolsero le ricerche del Volterra sulla propagazione delle onde cilindriche, nei mezzi isotropi giungendo anche in questo caso alla estensione del principio di Huygens, con ampi svolgimenti di calcolo, non privi però di eleganza.

Ma nei primi anni della sua residenza a Torino l'attenzione del nostro matematico fu richiamata verso un problema meccanico, di cui largamente si occupavano in quel tempo astronomi e geodeti. Si era scoperto che le latitudini dei punti della terra non erano invariabili, ma subivano piccolissime oscillazioni, rivelate dalla grande precisione e finezza delle osservazioni in quel tempo raggiunte. Il polo terrestre non era fisso sulla superficie del globo, ma descriveva delle curve irregolarmente spirali intorno ad una posizione media centrale. La spiegazione di questo fenomeno fu cercata dagli astronomi, come Schiaparelli e Giorgio Darwin, in fatti di natura accidentale, moti sismici, eruzioni vulcaniche, spostamenti di masse glaciali e così via. Il Volterra ebbe l'idea di ricercare le cause del moto polare in fenomeni di carattere permanente, come le correnti oceaniche, il moto dei fiumi, gli scambi di vapor acqueo fra la terra e l'atmosfera. Tali fenomeni per la loro regolarità possono, assai meglio degli altri, essere sottoposti al calcolo. E difatti il Volterra trovò le equazioni del moto di un corpo, nel quale certe parti si muovono senza che ne risulti alterata la distribuzione della massa. Il problema così schematizzato è suscettibile di una trattazione che è una generalizzazione di quella usata da Jacobi per risolvere il problema del moto di un corpo rigido intorno ad un punto. Si perviene per questa via a trovare dei periodi di rotazione del polo, che effettivamente coincidono con periodi osservati. Il fenomeno però nella realtà presenta grandi irregolarità, per il sovrapporsi delle perturbazioni accidentali, ed anche attualmente gli astronomi incontrano serie difficoltà, anche limitandosi ad una rappresentazione con formole empiriche.

Le ricerche del Volterra in questo campo presentano un altro grande interesse perchè s'incontrano colla teoria dei moti ciclici, im-

maginati da Helmholtz, per la spiegazione delle leggi della termodinamica, e con quella dei moti nascosti introdotti da Hertz nella meccanica.

Passando ora al campo delle ricerche analitiche del nostro matematico, incontriamo anzitutto quelle relative al problema della inversione degli integrali, e delle equazioni integrali, nelle quali ha segnato nuovi successi e nuove conquiste.

Casi speciali d'inversione d'integrali definiti si erano da tempo presentati nell'analisi. L'integrale doppio di Fourier può essere considerato come un primo caso d'inversione d'integrali. Abel aveva pure dato un esempio classico d'inversione e Beltrami aveva osservato che il problema fondamentale dell'elettrostatica è sostanzialmente un problema d'inversione d'integrali. Un lavoro assai importante di Liouville e Sturm del 1836 era stato quasi dimenticato.

Il Volterra ebbe l'idea di studiare il problema da un punto di vista generale, lasciando indeterminata, salvo alcune inevitabili limitazioni, la funzione che costituisce il così detto *nucleo* dell'integrale. E, colla solita abilità analitica, riuscì a scoprire la soluzione del problema mediante quei procedimenti iterativi che poi furono usati da tutti gli autori che in numero grandissimo si occuparono di problemi di questa specie.

Egli aprì in tal modo agli analisti un campo vastissimo di ricerche. La sua originalità e l'importanza dei risultati raggiunti appaiono qui in piena luce. Il metodo di ricerca da lui usato in questi studi è sostanzialmente basato su di un principio assai semplice, già usato in qualche caso in analisi, ma da Lui elevato a principio generale ed applicato ad una grande quantità di questioni diverse. Egli lo chiama *Principio di passaggio dal discontinuo al continuo* e, cosa curiosa, non si è mai curato di formularlo in modo preciso. Nella *Théorie générale des fonctionelles* (Parigi, 1936, pag. 3) Egli scrive: *esso costituisce un metodo di scoperta che si è rivelato estremamente fecondo. Il suo ufficio è stato e resta fondamentale nei progressi del calcolo funzionale.*

Veniamo così a contatto col campo delle grandi ricerche analitiche del nostro matematico, campo astratto al quale ha dedicato gran parte della sua attività scientifica, compiendo conquiste imperiture, ma del quale non sarebbe possibile parlare senza il sussidio dell'algoritmo

matematico, mezzo di espressione potente, ma, pur troppo, non a tutti accessibile.

Ricorderò piuttosto un giudizio di Lui sulle scienze matematiche, che rivela come Egli intimamente le concepisse:

« Il sentimento artistico, inteso nel suo significato più alto e comprensivo, ha avuto ed ha una gran parte nelle scoperte geometriche. »  
 « Si comprende quindi come la matematica, la scienza che non solo è la più pura e la più ideale, ma è la più schiettamente artistica delle scienze, abbia potuto trovare, sino dalle epoche lontane, un terreno favorevole per svilupparsi in Italia, ove il genio artistico è innato nelle genti, e ben si comprende il carattere dell'opera matematica prodotta dagli ingegni italiani, carattere che si ravviserà nelle varie scuole e nelle diverse tendenze... ».

(Discorso pronunziato nella solenne inaugurazione del Congresso internazionale dei matematici in Roma il 6 aprile 1908).

Più prossime al campo fisico sono le applicazioni che il Volterra poté compiere, mediante la sua teoria delle equazioni integrali, nello studio dei fenomeni ereditari. Questa parola *eredità* ha nel campo fisico un significato convenzionale, ben diverso da quello che essa ha nelle scienze naturali, e sta a significare il fatto che alcuni fenomeni non dipendono soltanto dalle azioni attuali, che li determinano, ma anche dalle azioni che hanno subito in epoca precedente. Fatti di questo genere erano ben noti ai fisici, che li denominavano fenomeni di *isteresi*, ma scarse erano le ricerche teoriche su di essi, e soprattutto non sistematiche.

Il Volterra applicando le generalizzazioni del concetto di funzione, da Lui stabilite, poté dare una rappresentazione analitica generale delle azioni ereditarie. Nel campo dei fenomeni elastici, ove particolarmente questi fenomeni si manifestano, estese le equazioni dell'equilibrio in modo che comprendessero anche l'eredità. Ritrovò così delle equazioni integrali, oggetto delle sue classiche ricerche ed anche un nuovo tipo di equazioni che denominò integro-differenziali, poichè partecipano simultaneamente del carattere di equazioni integrali e differenziali.

All'antica classica teoria dell'elasticità fu così aperto un nuovo campo di ricerche, che la avvicina assai più alla realtà fisica. Natural-

mente il Volterra non si fermò alle nuove equazioni stabilite, ma colla solita abilità analitica e approfittando dei metodi generali, già da lui stabiliti, ne studiò la integrazione, e la raggiunse effettivamente in varî casi notevoli. Così risolse nel caso ereditario il problema della deformazione della sfera isotropa per dati spostamenti, o per date tensioni in superficie.

Oltre che alle equazioni dell'elasticità il Volterra applicò i suoi metodi alle equazioni elettro-magnetiche di Hertz, ottenendone la generalizzazione nel caso ereditario. Preparò così gli elementi per lo studio teorico dei fenomeni così importanti e di difficile trattazione che si verificano nei dielettrici, e nella propagazione delle onde elettriche.

Non soddisfatto dei grandi successi ottenuti nella analisi, nella meccanica, nella fisica-matematica, il nostro analista nell'ultimo periodo della sua meravigliosa attività, si volse alle scienze biologiche.

« Ho cominciato - egli lasciò scritto - gli studi più concreti e più sistematici di biologia matematica nel 1926 in seguito a conversazioni avute col professore Umberto d'Ancona. Facendo delle ricerche statistiche sui pesci che popolano i nostri mari, egli mi domandò se sarebbe stato possibile trovare qualche via matematica per prevedere le variazioni nella composizione delle associazioni biologiche ». L'invito non poteva cadere in terreno più adatto. Il Volterra pensò subito a porre in equazione il fenomeno basandosi su due principi assai semplici ed intuitivi: 1° considerare come continue le variazioni del numero degli individui appartenenti ad una data associazione, 2° ammettere che le variazioni naturali, non perturbate da agenti esterni, siano proporzionali al numero stesso degli individui componenti l'associazione. Diveniva così possibile scrivere l'equazione differenziale che regge le variazioni e quindi applicare le regole ordinarie del calcolo.

« Ho cominciato - Egli scrive - dall'esaminare il caso di due specie conviventi che si contendono lo stesso nutrimento, o che si nutrono l'una dell'altra. In questo caso è evidente, anche senza ricorrere al calcolo, che se la prima si nutre della seconda, questa aggredita dall'altra, diminuisce di numero. Ma raggiunto un certo limite, la prima non trova più il nutrimento sufficiente, quindi deperisce e va decrescendo. In conseguenza di ciò la seconda specie tende ad essere meno danneggiata dalla prima, la cui aggressione si fa meno intensa, onde

la seconda cresce fino a ritornare alle primitive condizioni. In tal modo gli aumenti e le diminuzioni delle due specie si susseguono dando luogo a fluttuazioni aventi carattere periodico ».

Sono appunto queste fluttuazioni che anche l'analisi matematica può rivelare, permettendo talvolta un confronto quantitativo coi dati della osservazione.

Il caso di due specie che convivono insieme può estendersi, seguendo gli stessi criteri, al caso di un numero qualunque di specie. Il risultato a cui si arriva può concretarsi in tre leggi: la prima afferma l'esistenza di fluttuazioni nel numero degli individui delle varie specie. La seconda che le medie di tali numeri non cambiano col variare delle condizioni di partenza. La terza che se si cerca di assottigliare il numero degli individui delle varie specie, le specie vittime se ne avvantaggiano, mentre gli aggressori sono danneggiati. Esiste, per così dire, una specie di giustizia sociale nelle associazioni animali, che forse sarebbe utile anche fra gli uomini.

Questa ultima legge era stata prevista da Carlo Darwin, ed il calcolo potè darne una conferma.

Il Volterra aveva avuto dei precursori nell'applicazione del calcolo a fenomeni biologici di carattere statistico, ma entro limiti più ristretti. Il biologo Ross, celebre per le sue ricerche sulla malaria, aveva stabilito delle equazioni per definire il corso della malattia nelle popolazioni. Attualmente vari naturalisti, anche in Italia, si servono di metodi ispirati alle idee del Volterra.

Possiamo ora notare, alla fine di questa rapida e certamente assai incompleta corsa nelle ricerche del nostro matematico, che Egli, qualunque abbia spinto le sue indagini in campi nuovi e con metodi nuovi, è rimasto sempre sostanzialmente fedele alle tradizioni ed ai procedimenti della Fisica matematica classica, nell'indirizzo di Betti, di Beltrami, di Lord Kelvin, di Helmholtz, di Poincaré. Delle nuove teorie innovatrici comparse in tempi recenti nella Fisica matematica e che hanno dato origine a tante discussioni, poco si curò; ne io lo sentii mai esprimere un giudizio su di esse, nè favorevole, nè contrario.



Debbo ora ricordare una pagina delle meno conosciute della vita del nostro Uomo di scienza, anche per il fatto che Egli non ne parlava mai. È quella che riguarda il suo servizio militare di guerra.

Volontario, a 55 anni, nel luglio 1915 fu nominato Tenente del genio, l'anno successivo Capitano per meriti speciali, addetto alle esperienze sui dirigibili. In tale ufficio si trovò durante il 1916 sul fronte italiano da Verona a Gorizia per studi di fototelemetria, nel novembre del 1916 sul fronte francese a Reims, Chalons, Fismes, Soisson per studiare gli apparecchi di quell'armata. Nel 1917 di nuovo sul fronte italiano a Gorizia, Monfalcone, Vertalba, Doberdò, poi sul Sabotino. Nella primavera del 1917 ed in quella del 1918, e nell'autunno 1918 ha attraversato ripetutamente la Manica per recarsi in Inghilterra.

Nel suo stato di servizio si legge:

« Il Capitano Volterra, durante il suo servizio militare diede prova della sua incomparabile competenza tecnica, sia per gli studi e le pubblicazioni fatte sui tiri d'artiglieria, sia per gli studi e le esperienze di fototelemetria. Oltre a ciò Egli ha il merito di essere stato il primo a proporre il gas elio per i dirigibili.

» Durante le sue missioni militari Egli ha mostrato ovunque una calma esemplare di fronte ai pericoli; per cui nel luglio 1916 ottenne un encomio solenne perchè a Campi di Bisenzio, durante una pericolosissima discesa da un'altezza di 5000 m. del dirigibile N. 7, su cui si facevano esperienze attinenti ad operazioni belliche, conservava tale sangue freddo da continuare i suoi studi e registrare tutte le variazioni del moto della aeronave.

» In zona d'operazione poi ha compiuto tutti i suoi studi ed esperienze sulle linee d'operazione avanzate, ed ha fatto osservazioni scientifiche sia sul fronte italiano, che su quello francese su terreno battuto dalle artiglierie nemiche di medio calibro, non curandosi degli immensi rischi a cui era sottoposto.

» Per i suaccennati motivi credo doveroso proporre il summenzionato Capitano del genio, Senatore Vito Volterra per la concessione della Croce al merito di guerra

(firmato): « Generale *Morrone* ».

Questa nota militare e guerriera getta uno sprazzo singolare di luce sulla figura di questo Uomo, apparentemente mitissimo, tutto de-

dito ad una vita di pensiero, che mai aveva avuto prima alcuna preparazione militare. Ed è per noi una fulgida prova che il suo carattere era completo, senza lacune, senza deficienze.

Enumerare gli onori, le distinzioni d'ogni genere che ebbe da quasi tutte le Nazioni del mondo sarebbe ben lungo. Egli fu socio si può dire di tutte le Accademie e Società scientifiche esistenti in Italia e fuori d'Italia.

Fu *doctor honoris causa* in Matematica della Università di Oslo, in Scienze della Università di Cambridge, in Filosofia della Università di Stoccolma, in Fisica della Clark University (Worcester Mass.), in Scienze della Università di Strasburgo, in Scienze della Sorbona, in Legge della Università di Edimburgo, in Scienze della Università di Oxford.

Anche dalla famiglia, che si formò, ha avuto grandi consolazioni: una consorte che come un angelo benefico tutta si diede a rendergli facile la vita, perchè potesse, senza preoccupazioni, dedicarsi ai suoi studi, alle sue ricerche, ai suoi viaggi; figli degni in tutto dei loro genitori.

Vito Volterra si spense in Roma l'11 di ottobre dello scorso anno, dopo un lento deperimento delle forze fisiche, che aveva lasciato intatte le facoltà intellettuali.

Aveva superato di cinque mesi gli ottant'anni.

La scienza nostra scrive il nome del Volterra accanto a quello dei grandi ricercatori che hanno tenuto alto fra le Nazioni il prestigio scientifico italiano alla fine del secolo XIX ed al principio del secolo XX.

La scienza mondiale vede con compiacimento celebrato l'eminente scienziato in questa eccelsa Accademia Pontificia, che non conosce confini, nè di Stati, nè di Nazioni, ed onora la scienza per sè stessa come una delle più alte, delle più pure, delle più nobili manifestazioni dello spirito umano.



VITO VOLTERRA e CARLO SOMIGLIANA

dal gruppo fotografico dei neo-laureati - Pisa 1881.

## PUBBLICAZIONI SCIENTIFICHE DI VITO VOLTERRA

1881.

*Sul potenziale di un'elissoide eterogenea sopra di se stessa.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Alcune osservazioni sulle funzioni punteggiate discontinue.* Napoli (Giornale di Matem. diretto dal Prof. G. Battaglini).

1882.

*Sui principi del calcolo integrale.* Napoli (Giornale di Matem. diretto dal Prof. G. Battaglini).

*Sopra alcune condizioni caratteristiche delle funzioni di una variabile complessa.* Milano (Annali di Matematica pura od applicata).

*Sopra una legge di reciprocità nella distribuzione delle temperature e delle correnti Galvaniche costanti in un corpo qualunque.* Pisa (Nuovo Cimento).

*Sopra alcuni problemi di idrodinamica.* Pisa (Ibid.).

*Sulle apparenze elettrochimiche alla superficie di un cilindro.* Torino (R. Acc. di Torino).

1883.

*Sopra alcuni problemi della teoria del potenziale.* Pisa (Ann. della Scuola Normale).

1884.

*Sopra un problema di elettrostatica.* Roma (Transunti R. Acc. dei Lincei).

*Sull'equilibrio delle superfici flessibili ed inestensibili.* Roma (Ibid.).

*Sopra un problema di elettrostatica.* Pisa (Nuovo Cimento).

1885.

*Sulla deformazione delle superfici flessibili ed inestensibili.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Integrazione di alcune equazioni differenziali del secondo ordine.* Roma (Ibid.).

*Sulle figure elettrochimiche di A. Guebhard.* Torino (R. Acc. di Torino).

1886.

*Sopra una proprietà di una classe di funzioni trascendenti.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1887.

*Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Napoli (Memorie Società dei XL).

*Sopra le funzioni che dipendono da altre funzioni.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sopra le equazioni dipendenti da linee.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni differenziali lineari.* Roma (Ibid.).

1888.

*Sopra una estensione della teoria di Riemann sulle funzioni di variabile complessa.*  
Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle funzioni analitiche polidrome.* Roma (Ibid.).

*Sulla teoria delle equazioni differenziali lineari.* Palermo (Circolo Matematico di Palermo).

1889.

*Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire.*  
Stockholm (Acta Mathematica).

*Delle variabili complesse negli iperspazii.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle funzioni coniugate.* Roma (Ibid.).

*Sulle funzioni di iperspazii e sui loro parametri differenziali.* Roma (Ibid.).

*Sulla integrazione di un sistema di equazioni differenziali a derivate parziali che si presenta nella teoria delle funzioni coniugate.* Palermo (Circ. mat. di Palermo).

1890.

*Sulle variabili complesse negli iperspazii.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle equazioni differenziali che provengono da questioni di calcolo delle variazioni.*  
Roma (Ibid.).

*Sopra una estensione della teoria Jacobi-Hamilton del calcolo delle variazioni.*  
Roma (Ibid.).

1891.

*Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sopra le equazioni di Hertz.* Pisa (Nuovo Cimento).

*Sopra le equazioni fondamentali della elettrodinamica.* Pisa (Ibid.).

1892.

*Sur les vibrations lumineuses dans les milieux biréfringents.* Stockholm (Acta Mathematica).

*Sulle vibrazioni luminose nei mezzi isotropi.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle onde cilindriche nei mezzi isotropi.* Roma (Ibid.).

*Sul principio di Huygens.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Necrologia del Prof. Enrico Betti.* Pisa (Ibid.).  
*Necrologia del Prof. Enrico Betti.* Firenze (Rivista Scientifico-Industriale).

1893.

*Sulla integrazione delle equazioni differenziali del moto di un corpo elastico isotropo.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sulle vibrazioni dei corpi elastici.* Roma (Ibid.).

1894.

*Sur les vibrations des corps élastiques isotropes.* Stockholm (Acta Mathematica).  
*Esercizi di Fisica Matematica. Sulle funzioni potenziali.* Torino (Rivista di Matematica).

1895.

*Sui fondamenti della teoria delle equazioni differenziali lineari.* Roma (Memoria Soc. dei XL).  
*Sulla teoria dei movimenti del polo terrestre.* Kiel (Astr. Nachrichten).  
*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi ciclici.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni variabili.* Roma (Ibid.).  
*Sulle rotazioni permanenti stabili di un sistema in cui sussistono moti interni stazionarii.* Milano (Annali di Matematica pura ed applicata).  
*Sulla rotazione di un corpo in cui esistono sistemi policiclici.* Milano (Ibid.).  
*Sulla teoria dei moti del polo terrestre.* Torino (R. Acc. di Torino).  
*Sul moto di un sistema nel quale sussistono moti interni strazionari.* Torino (Ibid.).  
*Sopra un sistema di equazioni differenziali.* Torino (Ibid.).  
*Sui moti periodici del polo terrestre.* Torino (Ibid.).  
*Osservazione sulla mia Nota « Sui moti periodici del polo terrestre ».* Torino (Ibid.).  
*Un teorema sulla rotazione dei corpi e sua applicazione al moto di un sistema nel quali sussistono moti interni strazionarii.* Torino (Ibid.).  
*Sulla teoria dei moti del polo nella ipotesi della plasticità terrestre.* Torino (Ibid.).  
*Necrologia del Prof. G. B. Erba.* Torino (Annuario dell' Univ. di Torino).

1896.

*Lettera al Presidente Brioschi.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sulla inversione degli integrali definiti.* Roma (Ibid.).  
*Sulla inversione degli integrali multipli.* (Ibid.).  
*Sopra alcune questioni di inversione di integrali definiti.* Milano (Annali di Matematica pura ed applicata).  
*Sulla inversione degli integrali definiti.* I. Nota. Torino (R. Acc. di Torino).  
*Sulla inversione degli integrali definiti.* II. Nota. Torino (Ibid.).

- Sulla inversione degli integrali definiti. III. Nota. Torino (Ibid.).*  
*Sulla inversione degli integrali definiti. IV. Nota. Torino (Ibid.).*  
*Osservazione sulla Nota del Prof. Lauricella relativa alla integrazione delle equazioni e sopra una nota di analogo argomento dell'Ing. Almansi. Torino (Ibid.).*  
*Lezioni di Meccanica. Prime nozioni di Cinematica. Livorno.*

1897.

- Sulle equazioni differenziali lineari. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).*  
*Sulla scarica elettrica nei gas. Roma (Ibid.).*  
*Sul principio di Dirichlet. Palermo (Circolo di Palermo).*  
*Un teorema degli integrali multipli. Torino (R. Acc. di Torino).*

1898.

- Sur la théorie des variations des latitudes. Stockholm (Acta Mathematica).*  
*Sul fenomeno delle Seiches. Pisa (Nuovo Cimento).*  
*Sur la théorie des variations des latitudes. Leipzig (Astr. Gesellschaft).*  
*Sopra una classe di equazioni dinamiche. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Sulla integrazione di una classe di equazioni dinamiche. Torino (Ibid.).*  
*Sopra alcune applicazioni delle leggi del flusso di energia meccanica nel moto dei corpi che si attraggono con la legge di Newton. Torino (Ibid.).*  
*Sopra una classe di moti permanenti stabili. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Sopra alcune applicazioni della rappresentazione analitica delle funzioni del Prof. Mittag-Leffler. Torino (Ibid.).*  
*Sul flusso di energia meccanica. Torino (Ibid.).*  
*Sul flusso di energia meccanica. Pisa (Nuovo Cimento).*  
*Sulle funzioni poliarmoniche. Venezia (Istituto Veneto).*

1900.

- Sugli integrali lineari dei moti spontanei a caratteristiche indipendenti. Torino (R. Acc. di Torino).*  
*Necrologia del Prof. Eugenio Beltrami. Roma (Annuario dell'Univ. di Roma).*  
*Betti, Brioschi, Casorati, trois analystes italiens et trois manières d'envisager les questions d'analyse. Paris (Congrès International des Mathématiciens).*  
*Sur les équations aux dérivées partielles. Paris (Congrès International des Mathématiciens).*

1901.

- Sui tentativi di applicazione delle matematiche alle scienze biologiche e sociali. Roma (Annuario dell'Università di Roma).*

1902.

*Sur la stratification d'une masse fluide en équilibre.* Stockholm. (Acta Mathematica).

1903.

*Sul numero dei componenti indipendenti d'un sistema.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Congresso storico Internazionale.* Firenze (Arch. Storico Italiano).

*Commemorazione del Socio straniero G. G. Stokes.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sur les équations différentielles du type parabolique.* Paris (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences).

*Note on the application of the method of images to problems of vibrations.* London (Proceedings of the London Mathematically Society).

*Relazione sul viaggio compiuto dal Prof. Vito Volterra per incarico avuto dalla Commissione nominata per il riordinamento del Politecnico di Torino* (Febbraio-Marzo 1940).

1905.

*Un teorema sulla teoria della elasticità.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sull'equilibrio dei corpi elastici più volte connessi.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni dei solidi elastici più volte connessi.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni dei corpi elastici simmetrici.* Roma (Ibid.).

*Contributo allo studio delle distorsioni dei solidi elastici.* Roma (Ibid.).

*Sulle distorsioni generate da tagli uniformi.* Roma (Ibid.).

*Opere del Prof. Alfredo Cornu.* Torino (R. Acc. di Torino).

1906.

*Sur les fonctions qui dépendent d'autres fonctions.* Paris (Comptes Rendus de l'Académie des Sciences).

*Nuovi studi sulle distorsioni dei solidi elastici.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Leçons sur l'Intégration des équations différentielles aux dérivées partielles professées à Stockholm.* (Février-Mars 1906) Upsal.

*Les Mathématiques dans les sciences biologiques et sociales.* Paris (Revue du Mois).

*Sui tentativi delle applicazioni delle matematiche alle scienze biologiche e sociali.* Firenze (Archivio di Fisiologia).

*L'economia matematica ed il nuovo manuale del Prof. Pareto.* Roma (Giornale degli Economisti).

*Fondazione di un Politecnico nella città di Torino. Discorso pronunziato in Senato* (Giugno 1906).

1907.

*Sur l'équilibre des corps élastiques multiplement connexes.* Paris (Ann. de l'école Normale Supérieure).



*Proposta di una Associazione Italiana per il progresso delle Scienze.* Milano (Congresso dei Naturalisti Italiani).

*Parole pronunciate alle feste giubilari di Augusto Righi.* Bologna.

1908.

*Il momento scientifico presente e la nuova Società Italiana per il progresso delle Scienze.* Roma (Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze).  
*Parole pronunciate al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze.* Firenze (Ibid.).

*Parole del Preside della Facoltà di Scienze.* Roma (Onoranze al Prof. Sella).

1909.

*Sull'applicazione del metodo delle immagini alle equazioni di tipo iperbolico.* Roma (Atti del IV Congr. Intern. dei Matematici).

*Alcune osservazioni sopra proprietà atte ad individuare una funzione.* Roma (R. Acc. Lincei).

*Sulle equazioni integro-differenziali.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni della elettrodinamica.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni integro-differenziali della teoria della elasticità.* Roma (Ibid.).

*Parole pronunciate al Congresso della Società Italiana per il Progresso delle Scienze* Venezia (Atti della Società Italiana per il Progresso delle Scienze).

*Le Matematiche in Italia nella seconda metà del secolo XIX.* Roma (IV Congr. Intern. Matematico).

*Parole del Preside della Facoltà di Scienze.* Roma (Onoranze al Prof. Cremona).

*Necrologia del Prof. G. Vailati* Roma. (Boll. della Mathesis).

*Commemorazione di Valentino Cerruti.* Roma.

*Lectures delivered at the Clark University,* Worcester. Mass.

1910.

*Equazioni integro-differenziali della elasticità nel caso della isotropia.* Roma (Rend. R. Acc. Lincei).

*Soluzione delle equazioni integro-differenziali dell'elasticità nel caso di una sfera isotropa.* Roma (Ibid.).

*Questioni generali sulle equazioni integrali ed integro-differenziali.* Roma (Ibid.).

*Deformazione di una sfera elastica soggetta a date tensioni nel caso ereditario.* Roma (Ibid.).

*Osservazioni sulle equazioni integro-differenziali ed integrali.* Roma (Ibid.).

*Sulle equazioni permutabili.* Roma (Ibid.).

*Espacio, tiempo i masa segun las ideas modernas.* Buenos Aires (Sociedad científica Argentina).

*Parole pronunziate avanti al feretro di Stanislao Cannizzaro.* Pisa (Nuovo Cimento).

1911.

- Equazioni integro-differenziali con limiti costanti.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Contributo allo studio delle funzioni permutabili.* Roma (Ibid.).  
*Sopra le funzioni permutabili di 2 specie e le equazioni integrali.* Roma (Ibid.).  
*Sopra una proprietà generale delle equazioni integrali.* Roma (Ibid.).  
*Parole del Preside della Facoltà.* Roma (Onoranze al Prof. De Helguero).

1912.

- Sulle temperature nell'interno delle montagne.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Sopra equazioni di tipo integrale.* Cambridge. (Intern. Congress of Mathematicians).  
*Vibrazioni elastiche nel caso della eredità.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sur les équations integro-differentielles et leurs applications.* Upsala (Acta Mathematica).  
*L'évolution des idées fondamentales du calcul infinitésimal.* Paris.  
*L'application du calcul aux phénomènes d'hérédité.* Paris, 1912 (Révue du Mois).  
*Onoranze al Prof. Valentino Cerruti.* Roma.

1913.

- Leçons sur les équations intégrales et les équations intégrales-différentielles.* Paris.  
*Leçons sur les fonctions des lignes.* Paris.  
*Sui fenomeni ereditari.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sopra equazioni integro-differenziali aventi limiti costanti.* Roma (Ibid.).  
*Henri Poincaré. L'œuvre mathématique.* Paris (Révue du Mois).  
*Discorso sulla fondazione della scuola degli Ingegneri di Pisa.* Roma (Rend. del Senato).

1914.

- Henri Poincaré. Nouvelle collection scientifique.* Paris.  
*Onoranze al Prof. Dott. G. B. Guccia.* Palermo (Supplemento al Rend. del Circolo Matematico di Palermo).  
*Osservazioni sui nuclei delle equazioni integrali.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).  
*Sulle equazioni alle derivate funzionali.* Roma (Ibid.).  
*Equazioni integro-differenziali ed equazioni alle derivate funzionali.* Roma (Ibid.).  
*Les problèmes qui ressortent du concept des fonctions de lignes.* Leipzig (Sitzungsberichten der Berliner Mathematischen Gesellschaft).  
*Die Vorlesungen über neue Fortschritte der Mathematisch Physik gehalten in September 1919 an der Clark University.* Berlin. e Leipzig, 1914.  
*Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Pisa (Nuovo Cimento).  
*Henri Poincaré. The Rice Institute Pamphlet.*  
*The theory of permutable functions.* Princeton (Lectures delivered at Princeton University, October 1912).  
*Sulle correnti elettriche in una lamina metallica sotto l'azione di un campo magnetico.* Note I, II, III, IV. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1916.

*Teoria sulle potenze dei logaritmi e delle funzioni di composizione.* Roma (Memoria della R. Acc. dei Lincei).

*Metodi di calcolo degli elementi di tiro dell'artiglieria aeronautica.* Roma (Rend. Istituto Centrale di Aeronautica).

1917.

*The generalization of the analytic functions.* The Rice Institute Pamphlet.  
*On the theory of waves and Green's method* (Ibid.).

*Inaugurazione dell'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.* Venezia, Dicembre 1916.

*Discorso inaugurale per l'Istituto Centrale di Biologia Marina in Messina.* Venezia (Boll. Trimestrale del R. Comitato Talassografico Italiano).

*Relazione sulla missione in Inghilterra ed in Francia compiuta dal 24 Aprile al 19 Maggio 1917.* Roma.

1918.

*Pietro Blaserna.* Roma (Rend. del Senato. Tornata del 27 Febbraio 1918).

*Dedica della memoria: Teoria delle potenze dei logaritmi, alla Università di Edinburgo.* Edinburgh.

1919.

*Relazione della Conferenza Interalleata sulla organizzazione scientifica.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Rapporto preliminare sulla terza conferenza del Consiglio Internazionale delle Ricerche tenuta a Bruxelles dal 18 al 28 Luglio 1919.* Roma (Ibid.).

*L'entente scientifique.*

*La terza conferenza del Consiglio Internazionale delle Ricerche.* Bologna (Intesa Intellettuale).

1920.

*Functions of composition.* Houston [Texas] (The Rice Institute Pamphlet).  
*Saggi scientifici.* Bologna.

*Pietro Blaserna.* Paris (Bull. du Bureau Intern. des Poids et Mesures).

*Le Congrès de Mathématiques de Strasbourg.*

*Interpellanza sulla Stazione Zoologica di Napoli.* Roma (Atti Parlamentari del Senato del Regno).

*Osservazioni sul metodo di determinare la velocità dei dirigibili.* Roma (Rassegna Marittima Aeronautica illustrata).

*Sur l'enseignement de la Physique mathématique et de quelques points d'analyse.* Toulouse (Comptes Rendus du Comité International des Mathématiciens).

*Commemorazione di Augusto Righi.* Roma (Atti Parlamentari del Senato del Regno).

1921.

*Funzioni di linee, equazioni integrali e integro-differenziali.* Buenos Aires (Anales de la Sociedad Científica Argentina).

*Relazione sull'insegnamento della dinamica nelle scuole industriali.* Bologna (Rivista di ottica e di meccanica di precisione).

*Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Roma (Atti Parlamentari).

*Flow of electricity in a magnetic field.* Berkeley University of California.

1922.

*Adress at the inaugural ceremony of the international Astronomical Assembly.* London (Transactions of the Astr. Intern. Union).

*Provvedimenti per la ricerca e la utilizzazione delle sostanze radioattive.* Roma (Atti Parlamentari).

1923.

*Sur les fonctions permutables.* Paris (Bull. de la Soc. Math. de France).

*Mouvement d'un fluide en contact avec un autre et surface de discontinuité.* Paris (Comptes Rendus des Séances de l'Ac. des Sciences).

*Commemorazione di Luigi Pasteur.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1924.

*Leçons sur la composition et les fonctions permutables.* Paris.

*Discorso presidenziale all'Accademia dei Lincei.* Roma (Rend. delle adunanze solenni della R. Acc. dei Lincei).

*Arthur Gordon Webster.* Worcester, Mass.

1925.

*Paroles prononcées au cinquantenaire de la Société Française de Physique.* Paris (Le livre du Cinquantenaire de la Société Française de Physique).

*Toast an Cinquantenaire de la Société Française de Physique.* Paris (Ibid.).

*Discorso presidenziale all'Accademia dei Lincei.* Roma (Rend. delle Adunanze solenni della R. Acc. dei Lincei).

*Commemorazione del Presidente Francesco D'Ovidio.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*In memoria di Cornelia Fabri.* Ravenna (Arti Grafiche).

1926.

*Fluctuations in the abundance of a species considered mathematically.* London (Nature).

*Variazioni e fluttuazioni del numero di individui in specie animali conviventi.* Città di Castello (Memoria R. Acc. dei Lincei).

*L'ignorance sépare, la science rapproche (La science et la vie).*

1927.

*Teoría de las funcionales y de las ecuaciones integrales e integro-diferenciales.* Madrid (Conferencias en la Facultad de Ciencias de Madrid).

*Variazioni e fluttuazioni in specie animali conviventi.* Venezia (Comitato Talas. Italiano).

*Sulle fluttuazioni biologiche.* (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Leggi sulle fluttuazioni biologiche.* Roma (Ibid.).

*Sulla periodicità delle fluttuazioni biologiche.* Roma (Ibid.).

*Essai mathématique sur les fluctuations biologiques.* Paris (Bull. de la Société d'Océanographie de France).

*Una teoria matematica sulla lotta per l'esistenza.* Milano.

*Une théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Milano (Scientia).

*Rapports et Procès verbaux des réunions du Conseil Permanent pour l'Exploration de la mer.* Copenhaque.

*Cinquantenaire scientifique de M. Appell.* Paris.

*Lois de fluctuations de la population de plusieurs espèces coexistant dans le même milieu.* Paris (Ass. Française pour l'Avancement des Sciences).

*La création du Bureau International des Poids et Mesures.* Paris (Préface).

*Discours prononcé à la septième conférence générale des Poids et Mesures.* Paris (Comptes Rendus des Séances).

1928.

*Sur la théorie mathématique des phénomènes héréditaires* (Journal de Mathématiques).

*La teoria dei funzionali applicata ai fenomeni ereditari.* Bologna (Atti del Congresso Internazionale dei Matematici).

*Théorie mathématique de la lutte pour la vie.* Mosca (in russo).

*Variations and fluctuations of the number of individuals in animals species living together* (Journal du Conseil Intern. pour l'Exploration de la mer.).

*In memoria di H. A. Lorentz.* Bologna (Nuovo Cimento).

*Erik Ivar Fredholm.* Paris (Comptes Rendus des Séances du Comité International des Poids et Mesures).

*Cinquantenaire scientifique de Mr. Emile Picard* (Allocution au nom de l'Ac. Royale des Lincei).

1929.

*Alcune osservazioni sui fenomeni ereditari.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Sulle fluttuazioni biologiche.* Conferenza redatta dal Prof. Masotti, Milano (Seminarario Matematico e Fisico di Milano).

*Presentazione dell'ultimo volume delle opere di Alessandro Volta.* Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

1930.

*La théorie des fonctionnels appliquées aux phénomènes héréditaires* (Révue Générale des Sciences. Traduction de M. J. Pérès).

*Sulla meccanica ereditaria*. Roma (Rend. R. Acc. dei Lincei).

*Theory of the Volterra integral equation of second kind*. By Harold Thayer Davis (Indiana University Studies).

1931.

*Leçons sur la théorie mathématique de la lutte pour la vie*. Paris (Redigées par M. Brelot).

*Ricerche matematiche sulle associazioni biologiche*. Roma (Giornale dell'Ist. Ital. degli Attuarii).

*La concorrenza vitale tra le specie nell'ambiente marino*. Per Vito Volterra e Umberto d'Ancona. Paris [Orléans] (VII Congrès Intern. d'Aquiculture et de Pêche).

*Italians Physicists and Faraday's researches* (Supplement to Nature).

*I Fisici Italiani e le ricerche di Faraday* (L'elettrotecnica).

1932.

*Le calcul des variations, son évolution et ses progrès, son rôle dans la physique mathématique*. Praha [Brno] (Conférences Faites en 1931).

*Sur les jets liquides* (Journal de Mathématiques).

1933.

*Variacni pocet jeho vijvoj jeho pokroky ulcha y matenaticke iysice*. Praha.

*De Moivre's Miscellanea analytica* (Nature).

*Paul Painlevé et les inventions interallées* (Recherches et Inventions).

*Discours prononcé à la première Séance de la Conférence générale des Poids et Mesures*.

1934.

*Sur la théorie des ondes liquides et la méthode de Green* (Journ de Mathématiques).

*Equations aux dérivées partielles et théorie des fonctions* (Ann. de l'Institut H. Poincaré).

*Représentation des fonctionnelles analytiques déduites du théorème de Mittag-Leffler* (Journal de Mathématiques).

1935.

*Les associations biologiques au point de vue Mathématique* par M. Vito Volterra et M. Umberto d'Ancona. Paris, Hermann (Actualités Scientifiques et Industrielles).

1936.

*Les équations des fluctuations biologiques et le calcul des variations.* Paris (C. R. Ac. des Sciences).

*Les équations canoniques des fluctuations biologiques.* Paris (C. R. Ac. des Sciences).

*Sur l'intégration des équations des fluctuations biologiques* (Ibid.).

*Le principe de la moindre action en biologie.* Paris (Ibid.).

*La théorie mathématique de la lutte pour la vie et l'expérience* (Scientia).

*Théorie générale des fonctionnelles.* Volume I. *Généralité sur les fonctionnelles.*

*Théorie des équations intégrales,* in collaborazione col Prof. J. Pérès). Paris (Gauthier-Villars).

1937.

*Préface à l'ouvrage de Mlle Elena Freda. Méthode des caractéristiques pour l'intégration des équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques.* Paris (Gauthier-Villars).

*Principe de la Biologie Mathématique* (Acta Biotheoretica).

*Préface à l'ouvrage: W. A. Kostitzin, Biologie Mathématique.* Paris (Collection Armand Colin).

*Leggi sulle fluttuazioni e principii di reciprocità in biologia.* Perugia (Rivista di Biologia).

*Conférence des Poids et Mesures* (Comptes Rendus de l'Ac. des Sciences).

*I miei studi più recenti di Biologia Matematica* (Gazzetta del Popolo della Sera).

*Applications des mathématiques à la Biologie.* Genève (Enseignement mathématique).

1938.

*Population growth, equilibria, and extinction under specified breeding conditions; a development and extension of the theory of the logistic curve* (Human Biology).

*Lois des fluctuations biologiques et leur conséquences.* Paris (Bull. Soc. Mathématique de France).

*Opérations infinitésimal linéaires. Applications aux équations différentielles et fonctionnelles* par Vito Volterra et Bohuslaw Hostinsky. Paris (Gauthier-Villars).

*Conférences sur quelques questions de Mécanique et de Physique Mathématique. Rotation des corps dans lesquels existent des mouvements internes,* par Vito Volterra (Redaction de P. Costabel). Paris (Gauthier-Villars).

*Remarques sur l'action toxique du milieu à propos de la Note de M. Rehnier et Mlle Lambin.* Note de M. M. Vito Volterra et de V. A. Kostitzin. Paris (Ac. des Sciences).

*The General equations of biological strife in the case of historical actions.* Edinburgh. (Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society).

*Fluctuations dans la lutte pour la vie. Leurs lois fondamentales et de réciprocité. Conférences de la Réunion Intern. des Mathématiciens tenue à Paris, Juillet 1937.* (Gauthier-Villars).

1939.

*Calculus of Variations and the logistic curve* (« Human Biologie »).

1940.

*Energia nei fenomeni ereditarii.* Città del Vaticano (Pontificia Academia Scientiarum: « Acta », anno IV, n. 14).