SOPRA UNA CLASSE DI EQUAZIONI DIFFERENZIALI DELLA MECCANICA CELESTE DI CUI L'INTEGRALE GENERALE TENDE A ZERO(*)

(NOTA PRIMA)

GIUSEPPE ARMELLINI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Auctor, investigationibus a se ipso peractis circa aequationem differentialem motuum elasticorum (virium revocationis) innixus, proprietates quas invenerat extendit ad generalem casum motus alicuius puncti, quod attrahatur iuxta legem e distantia et tempore pendentem. Ex quo differentialium aequationum classem conficit, cuius generale integrale ad limitem nullum tendit, cum tempus ad infinitum augetur; quae proprietas maximi est momenti quod ad mechanicorum factorum studium.

1. – In una nota, pubblicata nei Rendiconti della R. Accademia dei Lincei(1) a Roma, io ho considerata nel campo reale l'equazione diffenziale

$$x'' + x\,\mathrm{M}(t) = 0 \tag{1}$$

dove, al solito, gli apici indicano le derivate fatte rispetto al tempo t ed ho dimostrato che, se M è funzione positiva, sempre crescente (od almeno mai decrescente) del tempo t e $\mathrm{Log}\,\mathrm{M}(t)$ tende regolarmente all'infinito con t, allora l'integrale generale della [1] tende certamente a zero per t tendente all'infinito.

(*) Nota presentata il 25 luglio 1942.

(1) Cfr. G. ARMELLINI, *Sopra una equazione differenziale della Dinamica*, in Rend. R. Acc. dei Lincei, 1935, sem. I.

Come è noto, la [1] è l'equazione del moto di un punto, sollecitato da una forza di richiamo (e cioè da una forza proporzionale alla distanza) variabile col tempo, ed ha perciò notevole importanza nella Meccanica Superiore e Celeste.

Ora io ho trovato che la proprietà accennata può estendersi al caso di forze attrattive molto più generali, dando così origine dal lato analitico ad una classe di equazioni differenziali del secondo ordine il cui integrale generale, nel campo reale, tende a zero. Di esse mi occuperò nella presente nota ed in altre successive.

2. - Consideriamo un punto mobile P di massa unitaria, attratta da un'origine fissa Q ed indichiamo con r la distanza PQ. Supponiamo che la forza di attrazione F sia data da $f(r)\,\mathrm{M}(t)$, formula che comprende come casi particolari un gran numero di problemi di Meccanica, e studiamo il moto di P.

In proposito, sappiamo dai fondamenti della Dinamica, che tale moto sarà piano, che avrà luogo con la legge delle aree e che r sarà legata a t dall'equazione differenziale:

$$r'' = \frac{c^2}{r^3} - \mathrm{F}(r,t) = \frac{c^2}{r^3} - f(r)\,\mathrm{M}(t) \tag{2}$$

dove c indica la costante delle aree, che supporremo diversa da zero.

Ora, sopra le funzioni f ed M, io farò le seguenti ipotesi:

I) La f sia funzione positiva, finita e non nulla per i valori positivi di r. Inoltre, salvo a togliere queste limitazioni in una nota successiva, supponiamo per ora che f non divenga infinita per $r=0$ e non tenda a zero per r tendente all'infinito.

II) La M sia positiva, finita, non nulla, sempre crescente (od almeno mai decrescente) per t positivo. In conseguenza, per t tendente ad ∞, essa tenderà ad un limite positivo A, oppure all'infinito.

Ciò posto, voglio qui dimostrare i seguenti teoremi preliminari:

3. - Teorema I. *Supponiamo che* M *tenda ad un limite finito* A *per* t *tendente ad* ∞, *e consideriamo un'integrale della* [2] *definito dai valori*

iniziali a e b di r e di r' per $t=0$, dove questi valori siano ambedue reali ed il primo positivo e non nullo. Dico che l'integrale r della [2], *comunque si scelgano questi valori iniziali, gode delle seguenti proprietà:*

1) *Esso non può annullarsi per qualsiasi valore positivo del tempo, né può tendere a zero quando il tempo cresce all'infinito. In conseguenza, crescendo il tempo, r tenderà ad un limite λ diverso da zero, oppure sarà funzione sempre oscillante senza tender ad alcun limite;*

2) *Se, tendendo t all'infinito, la r tende ad un limite λ, questo sarà radice dell'equazione:*

$$c^2 - A\lambda^3 f(\lambda) = 0 \tag{3}$$

3. – *Se invece r è funzione sempre oscillante tra infiniti massimi* (apastri, in linguaggio astronomico) *ed infiniti minimi,* (periastri) *la successione dei massimi e quella dei minimi saranno ambedue decrescenti* (od almeno non crescenti) *ed avranno quindi due limiti* L *ed l, tali che si abbia* $L > \lambda > l$, *essendo λ radice della* [3].

4. – Dimostrazione. Vediamo anzi tutto che r non può annullarsi per qualsiasi valore positivo t^* del tempo. Infatti, se ciò fosse, la [2] mostra che crescendo t da 0 verso t^*, la r'' diverrebbe da un certo istante in poi necessariamente positiva e tenderebbe ad ∞, onde la derivata prima r' diverrebbe necessariamente positiva prima dell'istante t^* e quindi r non potrebbe annullarsi in quell'istante. Ne segue che r, essendo inizialmente positiva, conserverà sempre questo segno in accordo con l'interpretazione meccanica della [2].

Inoltre è chiaro che r non può, da un certo istante in poi, essere sempre crescente e tendere all'infinito per t tendente all'infinito. Infatti, per le ipotesi fatte sopra la F, la [2] mostra che r'' sarebbe da un certo istante in poi sempre negativa e non tenderebbe a zero. In conseguenza, la derivata prima r' diverrebbe dopo un certo tempo necessariamente negativa e quindi r cesserebbe di crescere.

Ciò posto, possiamo fare soltanto due ipotesi e cioè:

1) O crescendo il tempo, r tende verso un limite finito λ.

2) Oppure essa oscilla perpetuamente tra infiniti massimi e minimi, senza tendere a nessun limite.

Con linguaggio della Meccanica Celeste, si hanno nel primo caso le orbite *spirali*, nel secondo quelle *periplegmatiche.*

5. – Cominciamo ad occuparci del primo caso.

È facile anzi tutto vedere che λ è sempre diverso da zero. Infatti, se r tendesse a zero quando t cresce all'infinito, la [2] mostra – per le ipotesi fatte sopra la f e tendendo M ad un limite finito A – che r'' diverrebbe da un certo istante in poi sempre positiva e crescerebbe all'infinito; il che esclude che r tenda a zero.

Ciò posto, poichè si suppone che r tenda verso un limite finito λ, è chiaro che, crescendo t all'infinito, la derivata seconda o non tenderà verso nessun limite oppure tenderà a zero. Ma λ, come abbiamo ora visto, è diversa da zero; dunque il secondo membro della [2] tende certamente verso un limite determinato, quindi r'' deve tendere a zero.

Annullando il secondo membro della [2] e ricordandoci che $M(t)$ tende verso A, si ottiene allora immediatamente la [3].

In proposito, osserviamo che – poichè f non si annulla all'infinito – il primo membro della [3] varia dal valore positivo c^2 al valore negativo $-\infty$ quando λ varia da zero ad ∞; in conseguenza, se f si suppone funzione continua, la [3] avrà un *numero dispari* di radici positive, che si ridurranno ad una sola se f si supponesse anche funzione crescente, od almeno non decrescente.

In questa ipotesi dunque l'orbita di P tenderà ad un cerchio di raggio λ avente per centro l'origine Q; in conformità al linguaggio della Meccanica Celeste, lo chiameremo *cerchio asintotico*, poichè l'orbita vi tende asintoticamente quando il tempo cresce all'infinito.

Come abbiamo visto, i cerchi asintotici, se f è continua, sono in numero dispari; e si riducono ad uno solo se f è funzione non decrescente.

6. – Passiamo ora a considerare il caso di r sempre oscillante tra infiniti massimi e minimi, senza tendere ad alcun limite; e cioè il caso delle orbite periplegmatiche della Meccanica Celeste.

Moltiplicando ambo i membri della [2] per $2r'$ ed integrando, abbiamo:

$$[4] \qquad r'^2 + \frac{c^2}{r^2} = \beta - 2\int_0^t \mathrm{F}\, r'\, dt$$

dove, tenendo presente la legge delle aree, sarebbe facile dimostrare che il primo membro rappresenta il quadrato della velocità del punto P nel suo moto intorno a Q, mentre β è una costante necessariamente positiva e non nulla (essendo c diverso da zero).

Supponiamo ora che, partendo dall'istante $t=0$, la r passi per un primo massimo R_1 nell'istante T_1; dico che dopo T_1 la r si manterrà sempre inferiore, od al più eguale, ad R_1.

Per dimostrarlo, notiamo che nell'istante T_1, essendo nulla la derivata prima, la [4] diviene:

$$[5] \qquad \frac{c^2}{\mathrm{R}_1^2} = \beta - 2\int_0^{\mathrm{T}_1} \mathrm{F}\, r'\, dt$$

Ciò posto, dopo T_1 la r diminuirà fino a raggiungere un minimo r_1 nell'istante t_1 e quindi tornerà di nuovo ad aumentare. Supponiamo, se è possibile, che raggiunga di nuovo il valore R_1 nell'istante $p(\mathrm{T}_1 < t_1 < p)$.

Si ha allora da [4]

$$[6] \qquad r'^2 + \frac{c^2}{\mathrm{R}_1^2} = \beta - 2\int_0^{p} \mathrm{F}\, r'\, dt$$

e quindi sottraendo [5] da [6] abbiamo:

$$[7] \qquad r'^2 = -2\int_{\mathrm{T}_1}^{p} \mathrm{F}\, r'\, dt$$

Ora tale equazione può scriversi più semplicemente nella forma:

$$[8] \qquad r'^2 = -2\int_{\mathrm{R}_1}^{r_1} \mathrm{F}\, dr - 2\int_{r_1}^{\mathrm{R}_1} \mathrm{F}\, dr$$

dove nel primo integrale dr è sempre negativo e nel secondo sempre positivo; inoltre, nel secondo integrale, in corrispondenza ad eguali valori di r, la F è maggiore, essendo maggiori i valori del tempo, rispetto a quelli che compaiono nel primo integrale.

Ne segue che il secondo integrale supererà il primo, onde il secondo membro della [8] sarà negativo; e ciò è impossibile, essendo il primo membro positivo o nullo. Ne segue che l'ipotesi fatta, cioè che r raggiunga di nuovo il R_1, è assurda.

Notiamo in proposito che, soltanto nel caso in cui, durante tutto l'intervallo di tempo considerato, la M non crescesse, i due integrali sarebbero eguali e di segno contrario, onde il secondo membro della [8] si annullerebbe. In tal caso, nell'istante p dovrebbe quindi aversi $r'=0$, onde la r si troverebbe ancora in un massimo che sarebbe eguale ad R_1.

Segue da ciò che la successione dei massimi:

$$R_1\, R_2\, R_3 \ldots R_n \ldots \tag{9}$$

è *decrescente*, od almeno mai crescente. In conseguenza, essendo composta di termini tutti positivi, tenderà certamente ad un limite positivo L.

Con analoghi ragionamenti si può provare che la successione dei minimi:

$$r_1\, r_2\, r_3 \ldots r_n \ldots \tag{10}$$

è anche essa *decrescente*, od almeno mai crescente. In conseguenza tenderà pure ad un limite positivo l.

In questa ipotesi dunque, l'orbita resta compresa dentro una corona circolare i cui cerchi estremi hanno raggi che, col crescere del tempo, tendono ai valori limiti L ed l.

Poichè la derivata prima si annulla agli estremi (massimi e minimi) e poichè, per il teorema di Rolle, tra due radici della derivata prima deve trovarsi almeno una radice della derivata seconda, è chiaro che tra L ed l dovrà essere compresa una radice λ della [3].

7. – Teorema II. *Supponiamo ora che la funzione* M, *ferme restando le altre ipotesi già fatte, tenda all'infinito quando il tempo cresce all'in-*

finito, e cioè che $A=\infty$. *In tal caso l'integrale* r *della* [2] *gode delle seguenti proprietà:*

1) *La* r *non può annullarsi per qualsiasi valore positivo del tempo, nè può tendere all'infinito quando il tempo cresce all'infinito.*

2) *Il raggio del cerchio asintotico è nullo, onde se crescendo il tempo all'infinito,* r *tende ad un limite, tale limite è sempre eguale a zero. In conseguenza,* r *non può essere sempre crescente ed inoltre, se da un certo istante in poi,* r *è funzione decrescente del tempo, essa tende a zero.*

3) *Se* r *si mantiene funzione oscillante, senza tendere a nessun limite, il limite* l *della successione dei minimi* (periastri) *è sempre eguale a zero.*

8. – Dimostrazione. La prima parte del teorema si dimostra come per il teorema precedente. Soltanto si vede che r può tendere a zero quando t cresce all'infinito, giacchè in tal caso (contrariamente a quanto avveniva per il teorema I) il secondo membro della [2] non tende necesssariamente a $-\infty$, quando r tende a zero e t tende ad ∞.

Anzi, osservando che ora si ha $A=\infty$, si vede che la [3] ha come unica radice $\lambda=0$; in conseguenza, se r tende ad un limite, tale limite è necessariamente eguale a zero. D'altra parte tendendo t ad ∞, il valore di r per cui si annulla r'' tende a λ e cioè a 0, onde $l=0$; cioè la distanza dei periastri da Q tende a zero.

Meccanicamente, vediamo quindi che in ogni caso l'orbita di P viene a passare sempre più vicina a Q; onde se questi ha dimensioni finite, *l'urto dei due corpi è inevitabile.*

Osserviamo però che non può dirsi che r abbia sempre per limite zero; infatti, se esso oscilla tra infiniti massimi e minimi, la successione dei massimi può avere un limite L maggiore di zero.

9. – *Orbite osculatrici.* Tornando al caso generale del moto piano, supponiamo che la M sia derivabile, e poniamo:

$$\int_a^r f(r)\,dr = \Phi(r) \tag{11}$$

dove a indica il valore iniziale di r per $t=0$. Integrando per parti la [4] e prendendo M come fattore costante, si ha subito:

$$[12] \qquad r'^2 + \frac{c^2}{r^3} + 2\,\mathrm{M}(t)\,\Phi(r) = \beta + 2\int_0^t \Phi(r)\,\frac{d\mathrm{M}}{dt}\,dt = \mathrm{H}(t)$$

dove $\mathrm{H}(t)$ indica l'energia totale del punto P, come è facile vedere dalla Meccanica. Se M è costante, anche H rimane costante e si ritrova il teorema della conservazione dell'energia.

Ciò posto, in conformità al linguaggio astronomico, chiameremo *orbita osculatrice* di P nell'istante T, l'orbita che esso descriverebbe da T in poi se, da quel momento, la M rimanesse costante e cioè sempre eguale ad M(T). L'equazione dell'orbita osculatrice è quindi:

$$[13] \qquad r'^2 + \frac{c^2}{r^2} + 2\,\mathrm{M}(\mathrm{T})\,\Phi(r) - \mathrm{H}(\mathrm{T}) = 0$$

la cui integrazione, essendo T costante, si riduce alle quadrature. È facile vedere che questa orbita passa per la posizione occupata da P nell'istante T ed è in essa tangente alla traiettoria effettiva descritta da P intorno a Q.

Indicando con ρ un raggio estremo (massimo, o minimo) dell'orbita osculatrice, vediamo quindi che ρ soddisfa all'equazione:

$$[14] \qquad \frac{c^2}{\rho^2} + 2\,\mathrm{M}(\mathrm{T})\,\Phi(\rho) - \mathrm{H}(\mathrm{T}) = 0$$

onde, se questa non ha radici reali positive, l'orbita stessa non può presentare nè massimi nè minimi.

Passiamo ora ai massimi e minimi dell'orbita osculatrice relativa all'istante $\mathrm{T}+d\mathrm{T}$ e cioè deriviamo la [14] rispetto a T. Si ha per la [11]:

$$[15] \qquad \left[-\frac{2c^2}{\rho^3} + 2\,\mathrm{M}(\mathrm{T})\,f(\rho)\right]\frac{d\rho}{d\mathrm{T}} + 2\,\Phi(\rho)\,\frac{d\mathrm{M}}{d\mathrm{T}} - \frac{d\mathrm{H}}{d\mathrm{T}} = 0$$

od anche, tenendo presente la [2] e la [12]:

$$[16] \qquad -2r''\frac{d\rho}{d\mathrm{T}} + 2\left[\Phi(\rho) - \Phi(r)\right]\left(\frac{d\mathrm{M}}{dt}\right)_{t=\mathrm{T}} = 0$$

dove $\frac{dM}{dt}$, per le ipotesi fatte, è sempre positivo o nullo e dove r indica il raggio vettore PQ nell'istante T, distinto naturalmente (tranne se in quell'istante avvenisse un periastro od un apastro) dai massimi e minimi dell'orbita osculatrice. Notiamo ancora che, essendo per ipotesi f sempre positiva, la Φ è funzione crescente.

Ciò posto, se ρ indica un massimo, il termine dentro parentesi quadre nella [16] sarà certamente positivo o nullo; ma allora $-2r''$ è positiva, dunque $\frac{d\rho}{dT}$ sarà negativo o nullo. Se invece ρ indica un minimo,il termine dentro parentesi quadre è negativo o nullo; ma allora $-2r''$ è negativa, dunque $\frac{d\rho}{dT}$ sarà ancora negativo o nullo.

Vediamo così che i massimi ed i minimi di un'orbita osculatrice, sono inferiori, od al più eguali, a quelli dell'orbita osculatrice precedente. Tale teorema può considerarsi come un'estensione di quello, già dato, sugli apastri e periastri dell'orbita effettiva.

Osserviamo in proposito che, se M non si conserva costante, il punto P non descrive l'orbita osculatrice, ma soltanto un tratto infinitesimo di essa, per passare poi all'orbita osculatrice successiva. Soltanto se, nella sua orbita effettiva, il punto P si trova in un apastro, o periastro, esso coincide col massimo o col minimo dell'orbita osculatrice in quell'istante.

In conseguenza, se per esempio nell'istante T_1 il punto P si trova nell'apastro R_1 e nell'istante T_2 ($T_2 > T_1$) nell'apastro successivo R_2, avremo:

$$R_2 - R_1 = \int_{T_1}^{T_2} \frac{d\rho}{dT}\, dT \tag{17}$$

da cui, essendo $\frac{d\rho}{dT}$ sempre negativa o nulla, risulterà $R_2 \leq R_1$. Analogo ragionamento può farsi per i minimi.

Ritroviamo dunque il teorema già dato sulle orbite effettive, come caso particolare di questa proprietà delle orbite osculatrici.

10. - Termineremo con un'osservazione. Poichè L può essere diversa da zero, affinchè r tenda a zero, non basta che M tenda all'infinito ma è necessario come dimostreremo, che - qualunque sia T - da T in poi gli incrementi *non* avvengano soltanto nell'intorno dell'apastro. E ciò si riconnette con la *regolare* tendenza delle funzioni ad ∞, nel senso da noi dato nella citata nota ai Lincei. Ma su ciò torneremo meglio in altro lavoro, dove esamineremo pure il caso che $f(r)$ si annulli per $r=\infty$.