ACTA
Vol. V - N. 17

OSSERVAZIONE ALLA NOTA DI MARIA ZEVI (*)

(Vol. V, n. 16, di questi « Acta »)

MAURO PICONE

Svmmarivm. — Auctor determinat quid requiratur quidque sufficiat ut ratio variandi in spatio quod est circa singula puncta campi complexae superficiei ex interpolari plurium variabilium functione, quae complexi variabilis functionem respiciat, notet huius holomorphiam in illo campo.

Dirò che gli $n+1$ punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$, del piano complesso $z = x + iy$, *tendono omoteticamente al punto* z, se, essendo t una quantità infinitesima, reale e positiva, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$, $n+1$ *fissati* numeri complessi, si ha

$$z_k = z + t\zeta_k \qquad (k = 1, 2, \dots, n+1).$$

Introdotta la funzione interpolare

$$f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1}) = \frac{|\,1, z_k, \dots, z_k^{n-1}, f(z_k)\,|}{|\,1, z_k, \dots, z_k^{n-1}, z_k^n\,|} \ (^1),$$

il teorema II della precedente nota di Maria Zevi stabilisce che:

Se, per $n \geqq 2$, supposta $f(z)$ funzione di x e di y differenziabile secondo Stolz *nel campo* A *del piano z, riesce determinato e finito, per*

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Ugo Amaldi, l'8 luglio 1941.

(1) Essendo $g_0(z), g_1(z), \dots, g_n(z)$, $n+1$ funzioni di z, col simbolo

$$|\,g_0(z_k),\ g_1(z_k),\ \dots,\ g_n(z_k)\,|,$$

intendo indicare il determinante d'ordine $n+1$:

$$\begin{vmatrix} g_0(z_1) & g_1(z_1) & \dots & g_n(z_1) \\ g_0(z_2) & g_1(z_2) & \dots & g_n(z_2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ g_0(z_{n+1}) & g_1(z_{n+1}) & \dots & g_n(z_{n+1}) \end{vmatrix}$$

ogni punto z di A, *il limite di $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ quando i punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ tendono omoteticamente al punto z, disponendosi secondo i vertici di un $(n+1)$–gono regolare col centro in z, la $f(z)$ è olomorfa in* A.

Ora è spontaneo domandarsi: Qual'è la più generale configurazione dei punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ tale che dall'esistenza e finitezza, in ogni punto z di A, per una funzione $f(z)$, ivi funzione di x e y differenziabile secondo Stolz, del limite di $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$ al tendere omoteticamente dei detti punti al punto z, si possa dedurre l'olomorfia di $f(z)$ in A?

A tale questione si risponde subito al modo seguente.

Fissati, per ogni punto z di A, i numeri $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{n+1}$, posto $\zeta_k = \xi_k + i\eta_k$, si ha, per $n = 1$,

$$\lim_{t\to 0} f(z + t\zeta_1, z + t\zeta_2) = \frac{(\xi_2 - \xi_1)f_x + (\eta_2 - \eta_1)f_y}{\xi_2 - \xi_1 + (\eta_2 - \eta_1)\,i} ,$$

comunque si assuma la funzione (differenziabile) f. Per $n = 2$, si ha

$$f(z + t\zeta_1, z + t\xi_2, z + t\zeta_3) = \frac{|1, \zeta_k, \xi_k|\, f_x + |1, \zeta_k, \eta_k|\, f_y + \omega(t)}{|1, \zeta_k, \zeta_k^2|\, t} ,$$

con

$$\lim_{t\to 0} \omega(t) = 0 ,$$

e pertanto, se

$$\lim_{t\to 0} \big(t f(z + t\zeta_1, z + t\xi_2, z + t\zeta_3)\big) = 0 ,$$

si ricava

$$|1, \zeta_k, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \eta_k| f_y = 0 .$$

Ma

$$|1, \zeta_k, \xi_k| + |1, \zeta_k, \eta_k|\, i = 0 ,$$

onde segue $i f_x - f_y = 0$, se non è $|1, \xi_k, \eta_k| = 0$, e si ha dunque che:

La funzione $f(z)$ è olomorfa in A *se, non essendo i punti z_1, z_2, z_3 allineati, si ha, posto $\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + |z_3 - z|$, in ogni punto z di* A,

$$\lim_{\sigma\to 0} \big(\sigma f(z_1, z_2, z_3)\big) = 0 ,$$

quando i punti z_1, z_2, z_3 *tendono omoteticamente a* z, *in particolare, se è determinato e finito il limite di* $f(z_1, z_2, z_3)$, *nel detto modo di tendere dei punti* z_1, z_2, z_3.

Per $n \geqq 3$, si ha

$$f(z+t\zeta_1, z+t\zeta_2, \dots, z+t\zeta_{n+1}) = \frac{|1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n+1}, \eta_k| f_y + \omega(t)}{|1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \zeta_k^n| t^{n-1}} ,$$

con $\lim \omega(t)$ (per $t \to 0) = 0$, e quindi se

$$\lim_{t \to 0} \left(t^{n-1} f(z+t\zeta_1, z+t\zeta_2, \dots, z+t\zeta_{n+1})\right) = 0 ,$$

si ricava

$$|1, \zeta_k, \dots, \xi_k^{n-1}, \xi_k| f_x + |1, \zeta_k, \dots, \zeta_k^{n-1}, \eta_k| f_y = 0 ,$$

onde segue $if_x - f_y = 0$, quando sia

$$|1, \zeta_k, \bar{\zeta}_k, \zeta_k^2, \dots, \zeta_k^{n-1}| \neq 0 \text{ (1)} ,$$

e si ha dunque che:

La funzione $f(z)$ *è olomorfa in* A, *se, verificandosi per i punti* $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ $(n \geqq 3)$ *la diseguaglianza*

[1] $$|1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2, \dots, z_k^{n-1}| \neq 0$$

si ha, posto $\sigma = |z_1 - z| + |z_2 - z| + \dots + |z_{n+1} - z|$, *per ogni punto* z *di* A,

[2] $$\lim_{\sigma \to 0} \left(\sigma^{n-1} f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})\right) = 0 ,$$

quando i punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ *tendono omoteticamente a* z, *in particolare se è determinato e finito il limite di* $f(z_1, z_2, \dots, z_{n+1})$, *nel detto modo di tendere dei punti* $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$.

---

(1) Con $\bar{\zeta}_k$ indico la quantità complessa coniugata con ζ_k.

Detta ε una radice primitiva $(n+1)^{ma}$ dell'unità, per $\zeta_1 = \zeta, \zeta_2 = \varepsilon\zeta, \dots, \zeta_{n+1} = \varepsilon^n \zeta$, i punti $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ si dispongono secondo i vertici di un $(n+1)$-gono regolare col centro in z, e riesce

$$\left| 1, \zeta_k, \bar{\zeta}_k, \zeta_k^2, \dots, \zeta_k^{n-1} \right| = \frac{\zeta\bar{\zeta}\zeta^2 \dots \zeta^{n-1}}{\varepsilon\,\varepsilon^2 \dots \varepsilon^n} \left| 1, \varepsilon^k, \varepsilon^{2k}, \dots, \varepsilon^{nk} \right| \neq 0 \,;$$

si ritrova pertanto il risultato della Zevi. Per $n=3$, l'eguaglianza $|1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2| = 0$, equivale alle seguenti

$$|1, x_k, y_k, x_k^2 - y_k^2| = |1, x_k, y_k, x_k \cdot y_k| = 0 \,,$$

onde la condizione $|1, z_k, \bar{z}_k, z_k^2| \neq 0$, impone ai punti z_1, z_2, z_3, z_4 di non trovarsi simultaneamente su due iperbole equilatere di equazioni:

$$a_1(x^2 - y^2) + b_1 x + c_1 y + d_1 = 0 \,, \quad a_2 xy + b_2 x + c_2 y + d_2 = 0 \,, \quad \text{ecc.}$$

Con quanto è stato osservato in questa e nella precedente mia nota, citata dalla Zevi, si può dunque enunciare la curiosa proposizione:

Se $f(z)$, *come funzione di* x *e* y *è differenziabile nel campo* A, *e se per ogni punto* z *di* A, *sussiste, con la condizione* [1], *la relazione di limite* [2], *per* $n\,(\geqq 2)$ *determinata funzione di* z, *i punti* $z_1, z_2, \dots, z_{n+1}$ *tendendo omoteticamente al punto* z, *allora esiste sempre, determinato e finito, il limite*

$$\lim_{\sigma \to 0} f(z_1, z_2, \dots, z_{\nu+1}) \,, \quad \sigma = |z - z| + |z - z| + \dots + |z_{\nu+1} - z| \,,$$

per qualsivoglia numero naturale ν *e senza che i punti* $z_1, z_2, \dots, z_{\nu+1}$ *siano assoggettati ad alcun vincolo!*