ACTA
Vol. V - N. 6

RIFLESSIONI SUI FONDAMENTI PRIMI DELLA TEORIA DEGLI INSIEMI (*)

GIOVANNI GIORGI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Dubia et paradoxa quaedam, in theoria complexuum (germanica lingua *Mengen*) orta sunt ex deficiente verborum proprietate. Generalis « classis » notio a « complexus » notione discernere opus est, et determinare quanam acceptione verbum « existere » adhibeatur. Qui strictis postulatis et definitionibus usus erit, perspiciet quosdam a CANTOR descripto complexus satis idonee definitos esse; alios minime quibus in praesenti scientiae statu, transfinitos numeros tribui licitum non fore.

Alcune delle questioni che tuttora si dibattono, e sembrano dover restare insolute nella dottrina degli insiemi, dipendono forse da disaccordo o da imprecisione nella terminologia.

Desidero fissare alcuni punti fondamentali che, anche se in parte non nuovi, sembrano bene spesso venire trascurati.

È stato già detto di dover distinguere *categoria* da *insieme*; intendendo la prima denominazione in senso lato, e la seconda nel senso specifico che corrisponde alla parola *Menge* di G. CANTOR. Per maggiore aderenza al linguaggio comune, e per evitare interferenze con quello dei filosofi, suggerisco di usare nel primo significato la parola *classe*. Quando consultai su questa proposta quel grande maestro che fu GIUSEPPE PEANO, egli mi avvertì che nel suo *Formulario Matematico* la parola « classe » era usata sempre nel significato ristretto di « insieme »; ma siccome in quel libro, categorie di carattere più generale non erano menzionate, questa asserzione ristretta non faceva ostacolo ad adoperare quel vocabolo in significato più largo.

(*) Nota presentata nella Tornata del 22 marzo 1941.

Dirò dunque *classe* nel significato in cui alcuni logici matematici hanno adoperato la parola « categoria »; cioè per indicare una totalità di elementi, la quale sia definita qualitativamente, senza necessità che sia precisata anche quantitativamente.

Chiamerò *insieme* una classe che sia definita anche quantitativamente, cioè sia caratterizzata in modo dato da non potere ad essa aggiungere o togliere elementi senza alterarne la definizione.

Per esempio: la totalità di tutte le coppie è una classe, in quanto esiste un criterio per distinguere se un certo insieme è o non è una coppia; ma non è un insieme, perchè quando uno crede di aver concepito la classe di tutte le coppie, può aggiungere sempre altre coppie, pensando per esempio alla nozione della classe stessa, o al simbolo che la denota, ripetuti due volte. Per contro la classe dei numeri interi forma un insieme. (1)

Eventualmente si potrà anche dire di un insieme *incompletamente definito* quando per alcuni enti ben precisati, resta incerto se si riguardano o no inclusi nell'insieme; ciò avviene per esempio allorchè si menzionano i punti di un segmento senza dire se gli estremi sono o no inclusi; e insieme *ben definito* nel caso contrario.

Generalmente, quando dirò di insieme, intenderò un insieme ben definito.

Solamente gli insiemi posseggono una « potenza » o « numero cardinale » nel senso di Cantor. La classe dei numeri trasfiniti cardinali e quella dei numeri trasfiniti ordinali non sono insiemi; Cantor le denota come *inkonsistente Vielheiten*; il ricordarsi di questo dirime un noto paradosso. Riguardo poi al trasfinito ordinale Ω e al preteso trasfinito cardinale che dovrebbe seguire immediatamente ad aleph-zero, ricordiamo la loro origine: Cantor ha rivolto l'attenzione sulla classe dei numeri ordinali appartenenti agli insiemi numerabili; ed ha ammesso che la classe medesima, abbia un numero cardinale, e che presa nel suo ordine naturale abbia anche un numero ordinale; e con questo

(1) G. Cantor nella sua lettera a Dedekind del 28 luglio 1899, mette in rilievo la differenza fra le due nozioni fondamentali, pur senza dare sufficienti parole esplicative; e usa la parola *Vielheit* quasi nello stesso significato in cui noi diciamo *classe*, e la dicitura *konsistente Vielheit* ovvero *Menge*, nel significato di *insieme*.

ha pensato di definire i due enti. Manca però la prova che quella classe abbia i caratteri di un insieme; quindi entrambi i detti trasfiniti si devono riguardare tuttora come non legittimamente definiti. Se noi teniamo per ferme queste conclusioni, evitiamo da una parte di costruire speculazioni sul vuoto, dall'altra di gettare il discredito sull'intera teoria dei trasfiniti.

Un altro vocabolo che ricorre nelle discussioni sugli insiemi e sugli enti matematici fondamentali è il verbo « esistere »; e anche quello, strettamente collegato, di « essere possibile ». Come è che matematici rigoristi usano parole come queste senza essere d'accordo sul loro significato?

Per esempio, si discute se *è possibile* in un insieme infinito di insiemi dati, effettuare infinite scelte, prendendo da ciascuno dei singoli insiemi un elemento; in altre parole se *esiste* un insieme composto di un elemento per sorta preso come sopra. La risposta potrebbe essere duplice, cioè incominciare con un « distinguo ». Allorchè mi si domanda se la nozione di un insieme composto di un elemento per sorta di tutti gli insiemi dati, implica o no contraddizione, potrò rispondere che questa contraddizione non vi è. Se invece mi si chiede se è costruttivamente possibile indicare una regola per effettuare queste scelte, cioè per stabilire una corrispondenza biunivoca fra ogni singolo insieme e un suo elemento privilegiato, risponderò che in singoli casi ciò è possibile, nella generalità dei casi non lo è. Quindi, secondo essi casi, e secondo l'uso che si vuole fare dell'insieme costruito con infinite scelte, sarà legittimo l'introdurlo in una dimostrazione, oppure no. E a questo proposito, vorrei far riflettere che non solo per le infinite scelte fatte su insiemi infiniti si presenta la difficoltà, ma anche per una singola scelta in un insieme finito può riuscire impossibile indicare un criterio costruttivo. Chi può distinguere con una definizione l'una dall'altra, le due radici dell'unità immaginaria? Chi può definire il verso destro o il verso sinistro delle eliche in un spazio nel quale le nostre mani, o qualche altro criterio materiale di confronto, non si possano trasportare?

Sono venuto a parlare di quello che si chiama « postulato di ZERMELO ». E di postulati sugli insiemi bisogna pur dire; perchè i chiarimenti che ho creduto di dare sul significato della parola « insieme » non sono definizioni; e questa nozione di insieme può essere solamente caratterizzata, come avviene per tante altre, dai postulati a cui soddisfa. A questo scopo sono state proposte varie serie di proposizioni; ma sembra che le idee a questo proposito non siano ben definite; forse è per questo che spesso i trattati sulla teoria degli insieme tacciono del tutto su questi postulati; ed è lacuna da deplorare.

Il sistema dei postulati più conosciuto è quello che dette ZERMELO. I primi tre di essi, e così pure una parte del quinto, e il settimo, non sollevano discussioni, e sono chiari, pur di ammettere conosciute certe parole che ivi si usano. La rimanente parte può sollevare discussione. Ecco in ordine, i postulati, nella forma originale:

1°) *Due insieme che hanno gli stessi elementi sono identici.*

2°) *Vi è un insieme che non contiene nessun elemento: esso è l'*insieme nullo. *Se esiste un oggetto a, esiste un insieme* $\}a\{$ *di cui questo oggetto è l'unico elemento. Se esiste un oggetto a e un oggetto b, esiste un insieme* $\}a, b\{$ *di cui questi oggetti sono gli unici elementi.*

3°) *L'insieme di tutti gli elementi di un insieme* M *che soddisfano a una data condizione forma un sottoinsieme di* M.

NB. – In luogo di quest'ultimo postulato si potrebbe più restrittivamente affermare che l'«intersezione» di due insiemi, cioè la classe degli elementi comuni ad entrambi, è un insieme. E non so se sia il caso di aggiungere come postulato a parte che la «somma» di due insiemi è un insieme, e che il «prodotto» di due insiemi è un insieme. Questi due enunciati sono bensì inclusi nel postulato 5° che viene più oltre, e il cui enunciato è più lato e meno elementare.

Proseguendo con l'enumerazione:

4°) *Ad ogni insieme* T *corrisponde un altro insieme* UT *formato da tutti i sottoinsiemi di* T.

Questo postulato è ovvio fra gli insiemi finiti, e forse anche per tutti quelli numerabili; ma si può tenerlo fermo in generale senza discutere la questione delle infinite scelte?

5°) *Sia un insieme* T, *i cui elementi sono essi stessi altri insiemi* Z: *esiste un insieme* ST *i cui elementi sono gli elementi degli insiemi* Z.

6°) *Se si ha un insieme* T *di cui gli elementi sono essi stessi altri insiemi* Z, *si può scegliere in ciascuno di questi insiemi elementari* Z *un elemento per ciascuno, e l'insieme degli elementi così scelti forma un sottoinsieme di* T.

È questo l'enunciato a cui volgarmente si dà il nome di *postulato di* ZERMELO. Sembra che la maggioranza dei matematici lo accetti senza discussione finchè il numero degli insiemi subordinati Z sia finito; ma obbietti contro l'asserzione sulla possibilltà delle infinite scelte. Ho accennato poco fa, e per incidente, la mia opinione in proposito. Tutto dipende dal significato attribuito alla dicitura « si può ». A seconda di questo significato il postulato potrebbe divenire accettabile anche per le infinite scelte, o sarebbe da rigettare anche per un numero di scelte finito.

7°) *Esiste almeno un insieme infinito.*

Credo che sarebbe necessario aggiungere, per edificare certe parti della teoria degli insiemi, un ottavo postulato, per asserire che la *Belegung* (*caricamento* o *applicazione*) di un insieme A sopra un insieme B genera un insieme; cioè, la totalità delle leggi di corrispondenza univoca (non biunivoca) in virtù della quale a ogni elemento di B corrisponde un elemento di A forma un insieme. Si può non ammettere questo postulato, o ammetterlo limitatamente, o illimitatamente. Nei primi due casi, occorre sostituirlo con altri postulati speciali nei singoli casi. Ecco un esempio cospicuo. Mediante l'applicazione di un sistema finito di cifre (per es. le dieci cifre della nostra numerazione) sopra l'insieme numerabile dei posti decimali che seguono per es. uno zero e una virgola, si genera l'insieme dei numeri reali compresi tra zero ed uno, e di conseguenza tutto l'insieme dei numeri reali. Se non è stato enunciato che con un'applicazione di questa sorta si genera un insieme ben definito, occorre postulare l'esistenza dell'insieme dei numeri reali come postulato a sé; perchè non è vero che col metodo genetico, partendo soltanto dai postulati che definiscono i numeri naturali, si generi il campo reale.

Gli antizermeliani rigorosi, che negano in ogni caso la possibilità delle infinite scelte, devono affermare l'esistenza del campo reale con un postulato speciale chiaramente espresso. Altrimenti, applicando semplicemente il metodo delle partizioni di Dedekind, o altro equivalente, nelle forme note, si genera bensì qualunque numero reale che soddisfi a determinate condizioni già enunciate, ma non si genera l'intero insieme dei numeri reali.