

SUR L'OPÉRATION $\overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y)$ (*)

W. SIERPIŃSKI

SUMMARY. — A. quaerit rationem L metiendi functiones, quae, ex functione BAIRE plurium variabilium, per supputationem \lim uni ex variabilibus applicatam obtinentur.

En rapport avec un résultat de M. N. LUSIN qui a construit une fonction de classe 2 de BAIRE de deux variables réelles, $\Phi(x, y)$, telle que la fonction (d'une variable réelle x)

$$[1] \quad f(x) = \overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y)$$

(où $\overline{\lim} \Phi$ désigne l'opération qui consiste à prendre la plus grande limite d'une fonction) est non mesurable B⁽¹⁾, je démontre les théorèmes suivants:

1) Si $\Phi(x, y)$ est une fonction de classe ≤ 1 , la fonction [1] est de classe ≤ 3 .

2) Si $\Phi(x, y)$ est une fonction de Baire (de deux variables réelles), la fonction [1] est mesurable L.

Le théorème 2 n'est qu'un cas particulier du théorème suivant:

3) Les fonctions qu'on obtient en partant de fonctions de Baire d'un nombre fini quelconque de variables réelles et en appliquant un

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini il 5 maggio 1940.

(1) *Leçons sur les ensembles analytiques et leurs applications*, Paris, 1930, pag. 318-319.

nombre fini de fois (dans un ordre quelconque) les opérations \lim_k (limite ordinaire d'une suite infinie) et $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ sont mesurables L.

On peut remplacer dans le théorème 3 $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ par $\underline{\lim}_{y=+\infty}$. Or, on ne sait pas si l'on peut dans le théorème 3 adjoindre aux opérations \lim_k et $\overline{\lim}_{y=+\infty}$ l'opération $\underline{\lim}_{y=+\infty}$. En effet, moyennant un résultat de M. C. KURATOWSKI présenté au Congrès des Math. à Zürich en 1932 on peut nommer une fonction $\Phi(x, y, z)$ de classe 2 de trois variables réelles, telle qu'il manque complètement de méthode pour décider si la fonction

$$f(x) = \underline{\lim}_{z=+\infty} \overline{\lim}_{y=+\infty} \Phi(x, y, z)$$

est mesurable L ou non.

Les démonstrations de ces théorèmes paraîtront dans le journal *Fundamenta Mathematicae*.