

## PROFILI DI SPIAGGIA (\*)

(Con due figure e tre tavole)

PIO SCATIZZI

**SUMMARIVM.** — Ex mere staticis hypothesis A. determinat quodnam regimen producat, in arenosa profunditate, undarum non intermissa pulsatio: linea curva, qua maris fundus ex hoc delineatur, ad cycloidis typum prope accedit. Ex quo etiam aliqua deducuntur circa lineam iuxta quam moles fluctibus opponendae extrui debeant.

Chiunque si faccia a considerare una spiaggia marina, allo scopo di ricavarne qualche riferimento scientifico, si troverebbe a bella prima non poco a disagio; perchè se v'è cosa al mondo irregolare, disordinata, e direi, capricciosa, ella è dessa una spiaggia.

Anche perchè, rigorosamente parlando, ed in regime di vento, o anche solo di onde di risonanza, la conformazione di una spiaggia muta sempre incessantemente. Ma, ove si rifletta, che la medesima è lavorata, e come modellata dalle onde; e che in fondo queste si frangono in un modo abbastanza uniforme, quasi costante; ben s'intende prescindendo dalla loro intensità, è duopo convenire che il supporto mobile delle arene o ciottoli, dovrà almeno macroscopicamente trovare un assetto di regime.

Cerchiamo di caratterizzarlo, valendoci di intuizioni dinamiche particolarmente semplici.

Prima di tutto supporremo che, a regime stabilito la superficie di spiaggia sia cilindrica, a generatrici orizzontali, onde si tratterà di assegnarne il profilo in un piano verticale, perpendicolare alle generatrici stesse.

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Tullio Levi-Civita il 18 febbraio 1940.

Va subito rilevato che dovremo ora impostare il problema di moto per una generica particella liquida sopra una traiettoria, che non è prestabilita, ma che ha assunto la sua configurazione finale per il giuoco delle forze. Data la natura del fenomeno, dobbiamo prendere in considerazione:

1) il peso della particella (verticale verso il basso) di intensità  $p = mg$ , con trasparente significato dei simboli;

2) una spinta orizzontale costante  $T$ , che schematizza l'azione diretta del vento e indiretta delle particelle liquide circostanti;

3) la reazione  $N$  del supporto (spiaggia). Supponiamo, a titolo d'assaggio, che questa reazione  $N$  annulli il peso, presentando poi una componente residua puramente normale all'incognito supporto. Tali ammissioni che ci permetteranno di determinare ad un tempo la forma della traiettoria e la legge del moto, vanno risguardate come una estensione all'incognito profilo della ipotesi elementare, che un sostegno prefissato privo d'attrito, offre soltanto reazione normale.

Dobbiamo ancora introdurre una ipotesi plausibile quanto all'intensità. Siccome, almeno qualitativamente, appare chiaro che quanto più intensa è la velocità della particella (che si può grossolanamente identificare con la velocità dell'onda), tanto più rilevante sarà la reazione  $N$ , il modo più spontaneo e più adatto per una prima traduzione matematica della questione, è di supporre  $N$  addirittura proporzionale alla velocità istantanea  $v$  della particella mobile. Porremo in conformità

[1]

$$N = kv .$$

Riguardando il coefficiente  $k$  (che ha le dimensioni  $mt^{-4}$  di una massa divisa per un tempo) come una costante.

Con tali premesse, si può senz'altro porre in equazione il problema del moto della particella nella fase d'investimento, e ne risulterà insieme determinata la sua traiettoria nel piano verticale, che è poi il profilo di spiaggia.

Quanto alla giustificazione delle suddette premesse, di cui ci siamo limitati ad indicare la plausibilità, potrà valere il confronto con l'os-

servazione diretta di cui alleghiamo un saggio nelle fotografie che accompagnano la presente Nota.

In base a quanto precede, possiamo esplicitare le equazioni del moto, riferendoci a due assi cartesiani ortogonali:  $Oxy$ , con  $Ox$  orizzontale nel senso del moto (dal mare alla spiaggia), e  $Oy$  verticale verso l'alto. I coseni direttori della tangente alla traiettoria nel senso del moto

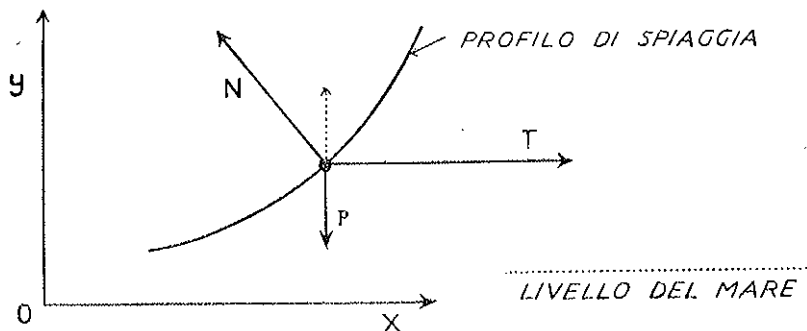


FIG. 1.

sono (designando la derivata rispetto al tempo con un punto sovrapposto)  $\frac{\dot{x}}{v}, \frac{\dot{y}}{v}$ ; quelli della normale (ruotata di  $90^\circ$  nel verso di  $y$ )  $-\frac{\dot{y}}{v}, \frac{\dot{x}}{v}$ .

Le componenti della forza  $N$ , risulteranno così

$$-N \frac{\dot{y}}{v}, N \frac{\dot{x}}{v}$$

cioè in base alla [1]  $-ky, kx$ ; e avremo senz'altro le equazioni del moto

$$[2] \quad \begin{aligned} m\ddot{x} &= T - ky \\ m\ddot{y} &= kx \end{aligned}$$

Ad integrarle, basta derivare una volta la prima, e sostituire ad  $\ddot{y}$  il suo valore ricavato dalla seconda; avremo allora l'equazione

$$\ddot{x} = -h\dot{y} = -h^2\dot{x}$$

avendo posto  $h = \frac{k}{m}$ .

Questa equazione è di secondo ordine in  $\dot{x}$ , la cui soluzione, ben nota nel problema del moto armonico, è data da:

$$[3] \quad \dot{x} = r \cos(ht + \theta_0); \quad \text{con } r \text{ e } \theta_0$$

due costanti d'integrazione. Cosicchè la seconda delle [2] dà in conseguenza

$$[4] \quad \ddot{y} = rh \cos(ht + \theta_0) \quad \text{e} \quad \dot{y} = r \sin(ht + \theta_0) + c_3$$

designando con  $c_3$  un'ulteriore costante.

Integrando ancora una volta questa o la [3], si perviene alle equazioni parametriche dal profilo

$$[5] \quad x = \frac{r}{h} \sin(ht + \theta_0) + c_2; \quad y = -\frac{r}{h} \cos(ht + \theta_0) + c_3 t + c_4$$

(con  $c_2, c_4$  costanti additive) o più sinteticamente, a mezzo delle posizioni

$$ht + \theta_0 = u, \quad \frac{r}{h} = \rho,$$

possiamo scrivere in definitiva:

$$[6] \quad x = \rho \sin u + c_2, \quad y = -\rho \cos u + c_3 u + c_4$$

con  $\rho, c_2, c_3, c_4$  quattro costanti d'integrazione.

Come si vede tale curva è certamente del tipo della cicloide, ad assi scambiati. Di qui si può ricavare l'equazione cartesiana del «profilo di spiaggia»:

$$[7] \quad y = b \operatorname{arcsen} \left[ \frac{x-a}{\rho} \right] - \sqrt{\rho^2 - (x-a)^2} + c ;$$

con  $a, b, c$ , in luogo di  $c_2, c_5, c_6$ .

Avremo quindi tre curve dello stesso tipo corrispondenti alla cicloide «allungata» ossia con nodo; o «a cuspide» o «accorciata», a seconda della lunghezza del raggio  $\rho$  rispetto al coefficiente di  $u$  nelle equazioni semplificate, in cui  $a=c=0$ .

Forse desterà sorpresa l'affermazione che il profilo di spiaggia sia espresso da codeste curve, ma la meraviglia cessa quando si rifletta che l'ipotesi matematica da noi introdotta rispecchia soltanto la fase d'investimento. All'infuori di essa il fenomeno fisico non verifica più le stesse ipotesi. In realtà, sulla sabbia, la curva arriverà fin quasi al primo punto di tangenza con una retta parallela all'asse  $y$ , o tutto al più fino al nodo. Ma per il resto della curva rientrante, manchevole di supporto, l'edificio crolla. Eccetto in qualche caso, in cui sia la sabbia grassa o impastata di piccoli ciottoli, che permette di arrivare fino all'incrocio del nodo; come viene accennato nella figura 4.

Ciò che si è detto della spiaggia emersa si deve ripetere per la spiaggia immersa, fino al punto in cui il fondo non risente più del moto ondoso della superficie. Possiamo quindi, senza tema, asserire che poco prima del livello marino in quiete, deve esistere generalmente uno *scalino di sponda*, ultima parte del profilo di spiaggia immerso. Tale scalino varia a seconda della cedevolezza del materiale di fondo, come è ovvio. Riunendo insieme i vari successivi profili cicloidici di un medesimo piano normale, si ottiene il *profilo completo di spiaggia*.

Non si deve omettere qui un *effetto secondario* del moto ondoso dovuto al ritorno dell'onda, per cui l'arena, meno perspicuamente, e i ciottoli visibilmente, sono trasportati dall'alto in basso, accrescendo o meno l'effetto di profilo.

Ciò perchè sul principio del ritorno dell'onda, la velocità è minima; ma a mezza corsa, già possiede notevole forza viva, capace di

trasportare in basso il materiale; aumentando lo scalino di sponda e per lo meno quella parte inferiore della cicloide. Tale effetto dovrebbe comparire nelle equazioni con un termine addittivo; ma il fenomeno essendo troppo esiguo e irregolare non è trattabile con un istrumento analitico, nè riuscirebbe attendibile.

DIGHE. — È prezzo dell'opera esporre qui un'applicazione alquanto inaspettata, e forse al lettore sembrerà fuori di proporzione e di argomento. Ma una certa filosofia finalistica mi suggerisce, che in natura, *quando delle forze operano in un ambiente, questo viene da loro modificato nel modo più atto a contenerle*. Perciò ritengo che nulla di meglio del profilo di spiaggia sia capace di frenare le onde, e per conseguenza, nulla di più opportuno si presta per il miglior profilo da assegnare ad una diga marina, esposta all'assalto dei marosi a cui si deve far fronte.

Anche recenti lavori insistono sul muro verticale, che contrastando frontalmente, non può, a lungo andare, se non raccomandarsi alla resistenza del proprio materiale, senza alcun ripiego strategico, contro un nemico tanto formidabile.

Si vede infatti dalla pratica, per dighe esposte a rombi d'alto regime, la necessità di difendere la diga verticale con un'altra diga di scogli artificiali! Il che prova la inanità ed irrazionalità della prima.

Si deve però citare una buona eccezione, nell'opera del signor A. K. EMY (*Mouvements des ondes et des Travaux hydrauliques Maritimes*), un vero osservatore e studioso del mare, e del suo moto ondosio, nei primi dell'ottocento.

Egli si rifà alla teoria del BROMONTIER che riponeva il moto ondosio in un puro movimento oscillatorio verticale delle particelle, e quindi con relativa disastrosa persuasione che bastasse la parete verticale. Trattò non solo delle onde, correnti, superficiali e visibili, ma anche dei « flots de fond » a cui attribuisce tutta la rovina delle fondamenta nelle opere marittime. Quanto però al profilo da dare alla diga, lo deduce da considerazioni meccanico-geometriche di genere puramente intuitivo; per cui ritiene che il profilo non deve essere nè puramente verticale e piano o soltanto inclinato, ma curvo con la

concavità verso il mare. Però, non essendo analista, non attribuisce un gran valore al genere di profilo, purchè sia curvo. Infatti al capo VIII dell'opera citata, a pag. 117, dice:

« Sans m'arreter a la recherche de la courbe qui satisferait le mieux aux conditions dont on pourrait compliquer le problème, recherche a peu près sans utilité, j'ai employé pour profil un arc de cercle. Une courbe qui aurait un très gran rayon de courbure a son point de tangence avec le fond de la mer, comme serait un arc d'ellipse, de cycloïde ou de spirale, satisferait d'autant mieux que la deviation de la route des flots de fond serait d'abord peu sensible, e quelle s'acroitrait ensuit de plus en plus ».

Dopo di che avendo di sopra dimostrato, in base al principio finalistico emesso ed al calcolo, che appunto la miglior curvatura della diga sia una cicloide, potrà prendere un suo particolare interesse questa Nota. Non posso quindi convenire con l'EMY che la forma speciale del profilo sia addirittura una questione inutile; per quanto infatti può es-

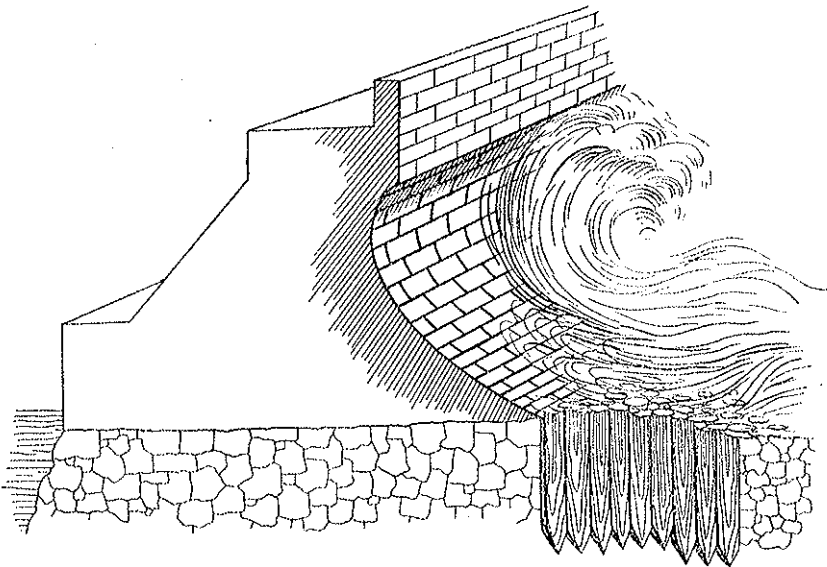


FIG. 2.

sere più o meno nocivo il colpo di un'onda, contro una diga, moltiplicato per miliardi! Qualora si diminuisca anche di poco quell'urto, ciò significherà prolungare proporzionalmente la durata della costruzione.

Credo quindi che se le dighe del genere si foggiasse secondo il nostro profilo cicloidico, si otterrebbe un riparo che, oltre ad avere dell'indistruttibile rispetto ai conati del mare, porge il vantaggio economico di compiere l'intera costruzione con la metà del materiale e minore ingombro anche per gli approdi. Potrà bastare l'interposto disegno schematico a persuadercene. L'onda viene ad infrangersi contro il suo stesso peso, e respinta dalla medesima forza con cui si era avventata. Va da sè, che il detto profilo si deve calcolare in base al massimo regime locale.



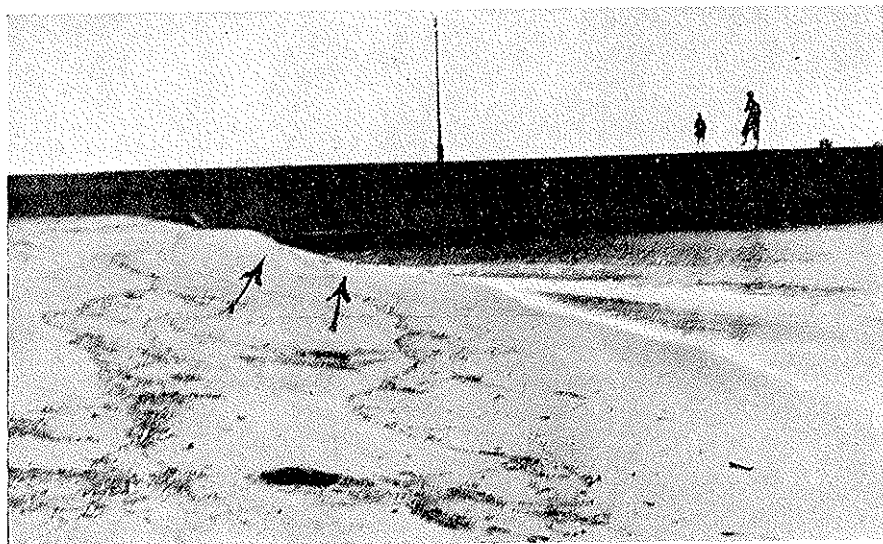


FIG. 1.

Le due frecce indicano un primo accenno di modellatura del profilo a regime normale.

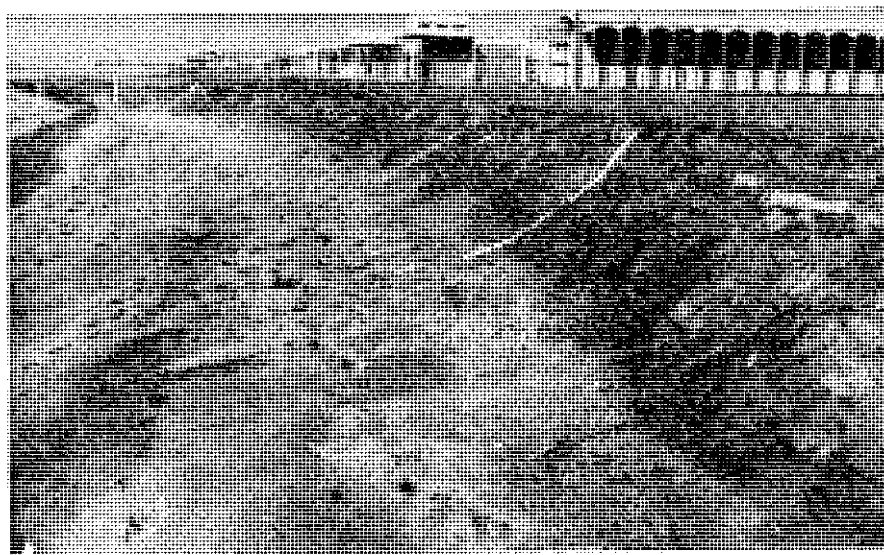


FIG. 2.

La linea a polvere di gesso lungo il profilo rende perspicua la curvatura cicloidica della lunga spalliera di alto regime.

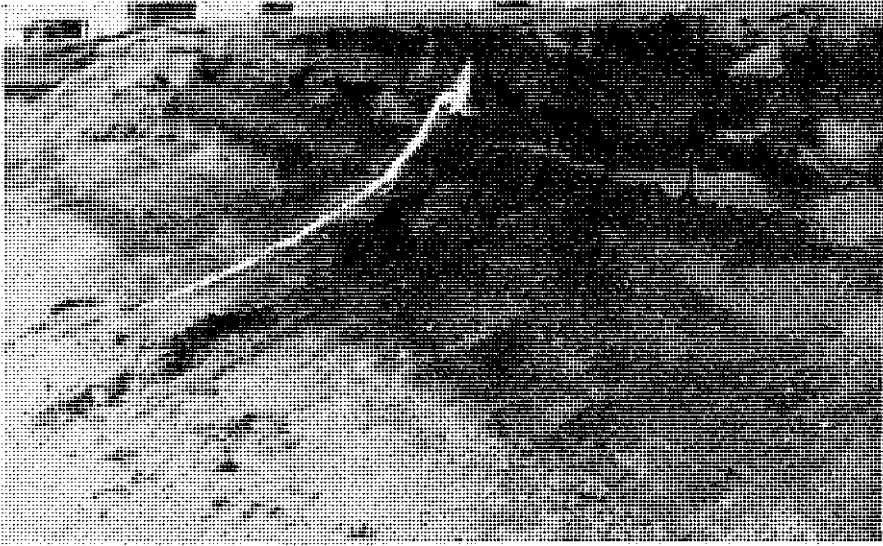


FIG. 3.

Altra linea indicante il tipo cicloidico della spiaggia. Le tre frecce indicano l'evidente striscia di crollo, ove cominciava il ramo simmetrico.

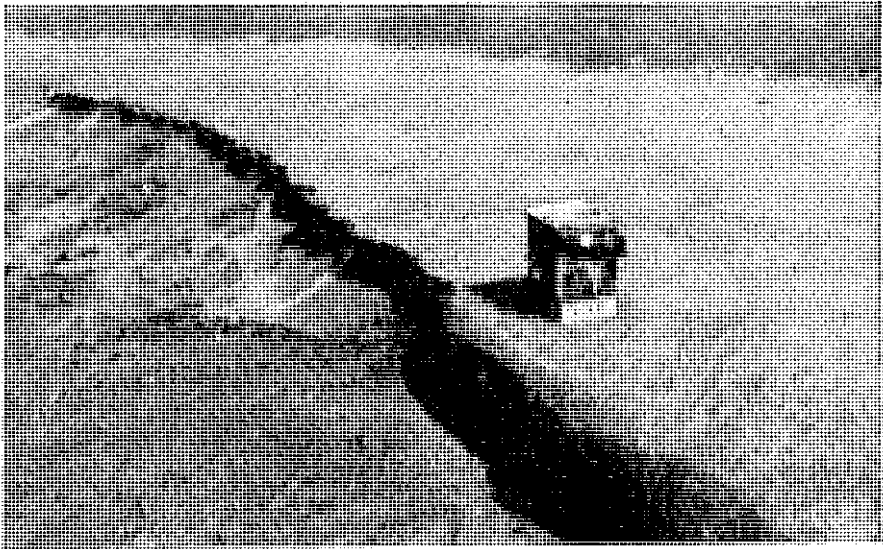


FIG. 4.

Su questa preziosa falda sabbiosa si scorge bene la curvatura di ritorno. L'ombra accusa quanta parte ancora ne resti campata in aria, a dimostrazione del tipo cicloidico.

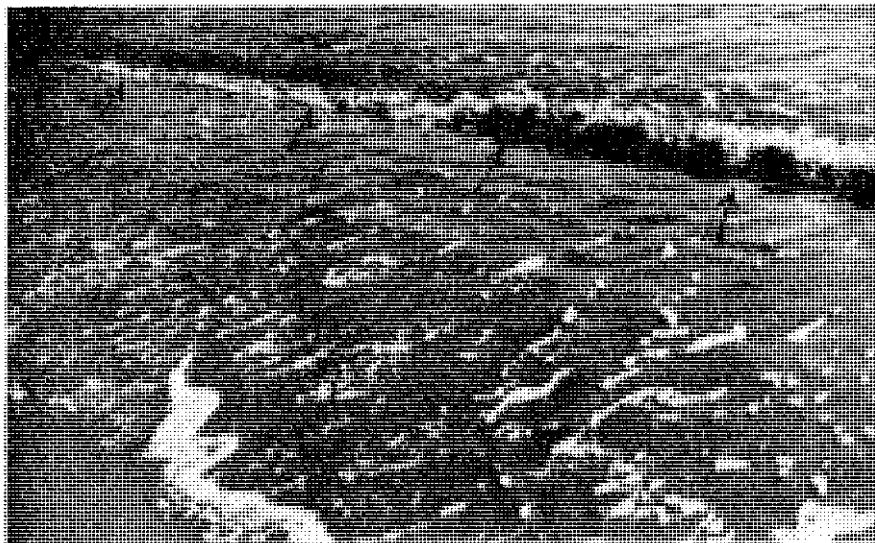


FIG. 5.

Le frecce indicano la linea netta dello *scalino di sponda*. I frangenti rigidamento lineari lo confermano.

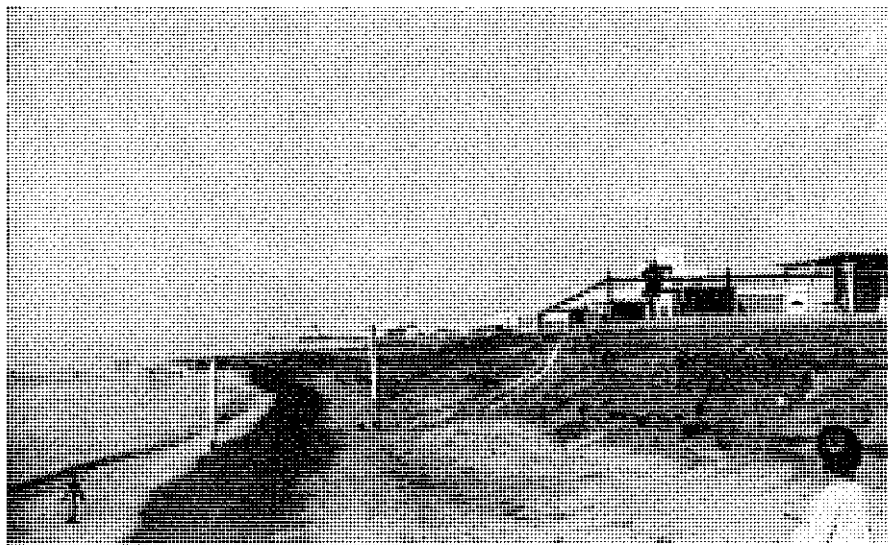


FIG. 6.

Questa veduta è come un riepilogo. Chiaro il profilo d'alto regime con linee superiori di crollo. La freccia a destra indica un secondo profilo a medio regime. Quella a sinistra fissa la linea ove si snoda contro luce il lungo scalino di sponda.