ACTA
Vol. IV - N. 4

NOZIONE ADIMENSIONALE DI VORTICE E SUA APPLICAZIONE ALLE ONDE TROCOIDALI DI GERSTNER (*)

TULLIO LEVI-CIVITA
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Vorticis mensurae iuxta Helmholtziana definitionem, eaedem sunt ac temporis cuiusdam inversa; vortex igitur non est a mensurae unitate independens, sicut opus esset ad qualitativam notam habendam, scilicet locale discrimen ab non-rotazionalitate motus. Quem in finem commode adhiberi potest integrale temporale vorticis in puncto quodam.

Auctor id applicat ad quoddam undosi motus genus peculiaris momenti.

I. — PREMESSE E CONSIDERAZIONI GENERALI.

La nozione classica di vortice, secondo l'HELMHOLTZ, è desunta dal campo della velocità di un fluido in movimento. Se, nello spazio occupato dal fluido ad un dato istante t, la particella, che si trova in questo istante nella posizione generica P, è animata dalla velocità $\boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t)$, si definisce notoriamente come vortice (in P, all'istante t) il vettore $\omega(\mathrm{P}, t)$, dedotto da $\boldsymbol{v}$ mediante l'operatore differenziale « rotore »,

$$\omega(\mathrm{P}, t) = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\mathrm{P}, t)$$

o, ciò che è formalmente lo stesso, riferendosi ad assi cartesiani $Oxyz$, mediante le componenti

$$\omega_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right), \quad \omega_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right), \quad \omega_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right).$$

(*) Memoria presentata il 3 dicembre 1939.

Se il vettore $\boldsymbol{v}$ (durante un certo intervallo di tempo) deriva da un potenziale, ω è zero (in quell'intervallo), e il moto dicesi irrotazionale. L'annullarsi del vortice caratterizza così, come ben si sa, i moti irrotazionali; e, almeno all'ingrosso, si è indotti a risguardare il vortice ω (o un qualche scalare positivo che si annulli col suo valore assoluto ω) come un naturale criterio di divario locale dai moti irrotazionali. Però si vede subito che, se ciò può andare comparativamente e qualitativamente, non è invece certo corretto ravvisare in ω, o ricavare da esso soltanto, un indice quantitativo del divario. La ragione è chiara, perchè ω *non è* un puro numero, bensì una quantità fisica di dimensione t^{-1}, il cui valore numerico, quando non sia rigorosamente nullo, dipende dalla scelta dell'unità di tempo.

Questa difficoltà pregiudiziale si evita associando (moltiplicativamente) ad ω una durata, per esempio moltiplicando per il tempuscolo dt ed eventualmente integrando durante un intervallo finito di tempo. Si è così condotti, per far intervenire l'andamento del moto in tutto un intervallo, diciamo $0 \vdash\!\dashv t$, ad integrare, sempre nello stesso posto (poichè il fenomeno fisico della produzione o dissipazione dei vortici concerne essenzialmente circostanze locali), il vortice ω, facendo capo al valore assoluto di

$$\Omega(\mathrm{P}, t) = \int_0^t \omega(\mathrm{P}, t)\, dt \ ,$$

che si dirà *vortice integrale*. Esso si annulla identicamente nel caso di moti sempre irrotazionali nell'intervallo di tempo che si considera.

D'altra parte conviene riflettere che la genesi fisica del vortice in un determinato punto P può essere attribuita all'azione, in un intorno di P, di forze, certo non conservative, ma esplicantisi del resto, secondo i casi, nell'uno o nell'altro senso; quindi forze non aventi necessariamente il carattere di resistenze passive, bensì eventualmente anche tali da provocare vortici diretti ora in un verso, ora in verso opposto. Perciò, a partire da un regime conservativo, e in particolare da un istante $t = 0$ in cui $\omega(\mathrm{P}, t)$ fosse zero, $\Omega(\mathrm{P}, t)$ potrà avere un andamento a priori arbitrario, onde il suo valore assoluto Ω sarà suscettibile, secondo i casi, sia di andare oscillando, sia di tendere a zero, sia anche di essere indefinitamente crescente, come per esempio accadrebbe nel caso di ω costante. Comunque, è sempre giustificato di risguardare il più grande valore di $\Omega(\mathrm{P}, t)$, nell'intervallo di tempo $0 \vdash\!\dashv t$, come misura del massimo divario dalla irrotazionalità, riscontratosi nel punto P, durante tutto quell'intervallo di tempo.

Una applicazione specifica di questa misura numerica di scostamento dalla irrotazionalità può essere fatta alle onde trocoidali di Gerstner. Come si sa, queste onde costituiscono una soluzione, ad un tempo rigorosa e semplice, delle equazioni idrodinamiche, suscettibile di essere espressivamente illustrata per via geometrica elementare. Esse vengono particolarmente utilizzate nelle applicazioni nautiche e geofisiche, pur essendo ben consci i cultori di meccanica dell'obiezione fondamentale che il moto delle particelle, da cui vengono generate tali onde, non è irrotazionale, sicchè la sua produzione dovrebbe ritenersi subordinata a circostanze complicate ed artificiali (per esempio un'azione del vento regolata *ad hoc*), e quindi poco probabili in natura. Resta però il fatto incontestabile che la teoria elementare serve bene a rappresentare i tratti salienti del fenomeno, sebbene faccia intervenire il moto vorticoso.

La spiegazione risiede probabilmente nel fatto che i moti in questione sono bensì vorticosi, ma prossimi alla irrotazionalità, come avrebbe potuto ragionevolmente presumersi in base ai risultati sperimentali di una importante indagine grafico-numerica del prof. H. Favre (1). Questi istituì un accurato confronto delle linee di flusso, rispetto ad osservatori animati dalla stessa velocità di propagazione, e, nei due casi delle onde trocoidali di Gerstner e di quelle, rigorosamente irrotazionali, da me assegnate (2). Riconobbe così che, a parità di lunghezza d'onda λ e di altezza a, le caratteristiche del fenomeno, nel suo aspetto stazionario, e più precisamente le suddette linee di flusso, sono praticamente confondibili, purchè il rapporto a/λ non superi $^1/_{20}$.

---

(1) *Le problème des vagues*, Schweizerische Bauzeitung, vol. 108, 1936, n. 1 e 2.

(2) *Détermination rigoureuse des ondes permanentes d'ampleur finie*, Math. Ann., B. 93, 1925, pag. 264-314.

II. — RICHIAMI CONCERNENTI LA RAPPRESENTAZIONE MATEMATICA DELLE ONDE DI GERSTNER.

Notoriamente le equazioni che individuano le onde trocoidali di GERSTNER, con l'asse delle y verticale verso il basso e l'asse delle x orizzontale nel senso opposto alla propagazione, sono (¹)

$$[1] \qquad \begin{aligned} x &= \alpha + e^{-\beta} \sin(\alpha + ct) \ , \\ y &= \beta + e^{-\beta} \cos(\alpha + ct) \ , \end{aligned}$$

dove, per semplicità, si è assunta la lunghezza d'onda λ eguale a 2π, mentre la velocità di propagazione c è ad essa legata dalla relazione $c^2 = g\lambda/2\pi$, che diviene, con la nostra scelta particolare dell'unità di lunghezza,

$$c^2 = g \ .$$

Si suppone specificamente α suscettibile di tutti i valori reali da $-\infty$ a $+\infty$; e β soltanto di valori positivi. Il determinante funzionale dei primi membri delle [1] rapporto ad α, β, vale

$$1 - e^{-2\beta} ,$$

e questo, nell'ipotesi testè ammessa $\beta > 0$, rimane costantemente positivo. Le [1] stesse sono quindi atte a definire inversamente α e β in funzione di x, y (e di t) in tutto il campo del moto. Tornando a considerare le [1] quali equazioni parametriche, ricordiamo che per $\beta = \text{cost.} > 0$, esse definiscono (rispetto ad un osservatore animato dalla velocità di propagazione $-c$; il che si rende manifesto, facen-

(¹) Cfr. per esempio APPELL, *Traité de mécanique rationnelle*, t. III, cap. XXXVI, pag. 509 (3ª ediz., Paris, Gauthier-Villars, 1920).

dovi apparire $x_1 = x + ct$, $\alpha_1 = \alpha + ct$, in luogo di x e di α) altrettante *trocoidi* che sono tutte *isobariche*, talchè una qualunque di esse può essere assunta come *pelo libero*. Noi supporremo per semplicità di discussione, non solo $\beta > 0$, ma addirittura β superiore ad un numero positivo B, scegliendo per B la radice positiva B^* della equazione

$$B - e^{-B} = 0$$

A questo proposito va osservato in primo luogo che, per B positivo, il primo membro $B - e^{-B}$ è funzione crescente di B, la quale ha il valore -1 per $B = 0$ e il valore positivo $1 - e^{-1}$ per $B = 1$. Esiste perciò una ed una sola radice nel frapposto intervallo, la quale vale approssimavamente

$$B^* = 0{,}57 \ . \tag{2}$$

Possiamo dunque ritenere

$$\beta \geqslant B \geqslant B^* > 0 \ . \tag{3}$$

Ciò posto, dalla seconda delle [1] apparisce che, lungo il pelo libero ($\beta = B \geqslant B^*$; $\alpha =$ costante arbitraria), il valore medio di y, al variare di t per un periodo (cioè in un intervallo di ampiezza $2\pi/c$), è β, talchè $e^{-\beta}$ si presenta come massima sopraelevazione del pelo libero sul suo livello medio $y = \beta$. Per conseguenza, essendosi assunto 2π come lunghezza d'onda, il rapporto $e^{-\beta}/2\pi$ fra altezza e lunghezza è sempre inferiore a

$$e^{-B}/2\pi \leqslant e^{-B^*}/2\pi = 0{,}57/2\pi = 0{,}08 \ .$$

Come ha rilevato il FAVRE, per i casi che possono interessare in pratica, si ha sempre

$$e^{-B}/2\pi \leqslant \frac{1}{20} = 0{,}05 \ ,$$

sicchè la limitazione precedente è certo soddisfatta, e quella che segue senz'altro applicabile. Essa si riduce del resto a combinare la seconda delle [1] con le disuguaglianze $\beta \geqslant B > e^{-B}$.
Ne consegue

$$y \geqslant \beta - e^{-B} \geqslant B - e^{-B} \; ,$$

$$y \leqslant \beta + e^{-B} \; ,$$

da cui si desume che il pelo libero $\beta = B$ (il quale, ad un osservatore fisso, appare in generale oscillante col posto e col tempo) resta sempre compreso nella striscia limitata superiormente dalla orizzontale $y = B - e^{-B}$, inferiormente dalla orizzontale $y = \beta + e^{-B}$.

III. — VORTICE E VORTICE INTEGRALE PER UN OSSERVATORE FISSO TERMINE SECOLARE - CONGETTURA INDUTTIVA.

Il vortice spettante ad una particella generica nel tipo di onde di cui qui ci occupiamo ha il valore numerico (1)

$$[4] \qquad \omega = c \frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}} \; ,$$

e conseguentemente il vortice integrale, a partire dall'istante $t = 0$ fino ad un generico istante t, l'espressione

$$[5] \qquad \Omega = \int_0^t \omega \, dt \; ,$$

(1) Appell, *loc. cit.*, pag. 215.

la quale, ponendo

$$[6] \qquad \tau = ct \ ,$$

può anche essere scritta

$$[7] \qquad \Omega = \int_0^\tau \frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}} \, d\tau \ ,$$

dove β deve ricavarsi dalle [1], in funzione di x, y e $\tau = ct$: le coordinate x, y del generico posto che si considera (fisso nel canale) vanno, come si è detto nelle considerazioni del paragrafo I, trattate quali costanti. La quantità β, la quale figura sotto il segno nella espressione [7] di Ω, pur dovendo essere riguardata funzione di y e di τ, rimane sempre, in base alla disuguaglianza [3], non inferiore alla costante positiva B.

Per conseguenza la funzione integranda $\frac{e^{-2\beta}}{1 - e^{-2\beta}}$ ha come limite inferiore la costante positiva

$$[8] \qquad \frac{e^{-2B}}{1 - e^{-2B}} \ ,$$

e ciò mostra che questa funzione (periodica di τ) presenta certo un *termine secolare positivo* $\bar{\omega}$ che porta all'integrale il contributo $\bar{\omega}\tau$.

Ω ha così l'espressione

$$\Omega = \bar{\omega}\tau + F(\tau) \ ,$$

dove $F(\tau)$ è funzione periodica. La conclusione si è che il vortice integrale Ω, e quindi il divario dalla irrotazionalità in un posto *fisso* generico, va crescendo indefinitamente col tempo.

Ciò lascia presumere che lo scostamento in parola, pur non essendo, come ha constatato il FAVRE, rilevabile nei casi concreti, rispetto ad un osservatore solidale con l'onda, dovrebbe invece poter essere, o meglio divenire macroscopicamente avvertibile, anche per piccoli increspamenti, cioè anche per piccoli valori di a/λ quali quelli contemplati dal Favre, dopo un tempo sufficientemente lungo. Bisognerebbe all'uopo escogitare un qualche dispositivo inteso a fornire (direttamente o indirettamente) un apprezzamento di Ω per un osservatore immobile nel canale. Simili apprezzamenti avrebbero automoticamente, rispetto ai diagrammi del Favre, la superiorità che gli effetti di divario, per quanto esigui, andrebbero accumulandosi nel tempo.