ACTA
Vol. IV - N. 18

REDUCCIÓN DE LAS ECUACIONES PENDULARES À LA ECUACIÓN DE V. VOLTERRA DE SEGUNDA ESPECIE (*)

GODOFREDO GARCÍA

SVMMARIVM. — De motu pendulari alicuius puncti super genericam lineam curvam non planam agens, Auctor, sumptis aequationibus iuxta suetam in dynamica formam, demonstrat harum resolutionem reduci ad solutionem aequationis integralis typi Volterra secundae speciei; quam resolutionem revera obtinet.

El señor KYRILLE POPOFF ha verificado la reducción de las ecuaciones pendulares à la ecuación integral de segunda espece del señor VITO VOLTERRA considerando la trayectoria plana, obteniendo así una elegante solución del problema. El objeto de la presente Nota es obtener la solución, siendo la trayectoria una curva gausa a la cual corresponden las ecuaciones pendulares siguientes:

$$
[1] \qquad
\begin{aligned}
\frac{dx}{d\theta} &= \theta_1 y - \theta_2 z \\
\frac{dy}{d\theta} &= \theta_1 x + z \\
\frac{dz}{d\theta} &= \theta_2 x - y
\end{aligned}
$$

siendo θ el ángulo de nutación, complemento del ángulo de inclinación mientras θ_1 y θ_2 son funciones de θ.

$$
[2] \qquad \theta_1 = \frac{\mathrm{R} - a\mathrm{R}^*}{\mathrm{P}} \qquad \theta_2 = \frac{\mathrm{Q}}{\mathrm{P}}
$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi il 29 maggio 1940.

Además la relación entre la nueva variable θ y el tiempo t está dada por $d\theta = \mathrm{P}\,dt$.

La tercera ecuación de las [1] da

[3] $$z = c + \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_2 x\, d\theta - \int_{\theta_0}^{\theta} y\, d\theta \ .$$

La segunda de las [1] da

[4] $$y = b - \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 x\, d\theta + \int_{\theta_0}^{\theta} z\, d\theta \ .$$

Sustituyendo en la [3] la y por su valor [4], y verificando despues sustituciones successivas de z, y aplicando la formula de DIRICHLET, y teniendo en cuenta que

$$\int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1\, d\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1\, d\theta \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1\, d\theta \quad \ldots\ldots \quad \int_{\theta_0}^{\theta} x\theta_1\, d\theta \to 0$$

cuando n tiende al infinito, haciendo las posiciones

[5] $$\begin{aligned} \psi(\theta) &= c\cos(\theta-\theta_0) - b\,\mathrm{sen}\,(\theta-\theta_0) \\ \varphi(\theta) &= b\cos(\theta-\theta_0) + c\,\mathrm{sen}\,(\theta-\theta_0) \\ f(\theta) &= a + b\int_{\theta_0}^{\theta} \Big[\theta_1 \cos(\theta-\theta_0) + \theta_2\,\mathrm{sen}\,(\theta-\theta_0)\Big]\, d\theta \, + \\ &\qquad + c\int_{\theta_0}^{\theta} \Big[\theta_1\,\mathrm{sen}\,(\theta-\theta_0) - \theta_2\cos(\theta-\theta_0)\Big]\, d\theta \end{aligned}$$

[6] $$\begin{aligned} \mathrm{N}(\theta, s) &= -\,\theta_1(s)\int_{\theta_0}^{\theta} \Big[\theta_1\cos(\theta-s) - \theta_2\,\mathrm{sen}\,(\theta-s)\Big]\, d\theta \, + \\ &\qquad + \theta_2(s)\int_{\theta_0}^{\theta} \Big[\theta_1\,\mathrm{sen}\,(\theta-s) + \theta_2\cos(\theta-s)\Big]\, d\theta \end{aligned}$$

se deduce que

$$z(\theta)=\psi(\theta)+\int_{\theta_0}^{\theta} x(s)\left[\theta_1(s)\operatorname{sen}(\theta-s)+\theta_2(s)\cos(\theta-s)\right]ds$$

[7] $$y(\theta)=\varphi(\theta)-\int_{\theta_0}^{\theta} x(s)\left[\theta_1(s)\cos(\theta-s)-\theta_2(s)\operatorname{sen}(\theta-s)\right]ds$$

$$x(\theta)=f(\theta)+\int_{\theta_0}^{\theta} x(s)\,\mathrm{N}(\theta,s)\,ds\ .$$

Esta última es la ecuación integral de segunda especie del señor Vito Volterra siendo el parámetro λ_0 en este caso igual a la unitad.

La fórmula

[8] $$x(\theta)=f(\theta)+\int_{\theta_0}^{\theta} f(s)\,\Gamma(\theta,s,1)\,ds$$

representa la solución de la ecuación integral tercera de la [7], siendo $\Gamma(\theta,s,1)$ el nucleo resolvente dado por la serie

[9] $$\Gamma(\theta,s,1)=\mathrm{N}(\theta,s)+\mathrm{N}^2(\theta,s)+\ldots\ldots+\mathrm{N}^n(\theta,s)\ ,$$

siendo

[10] $$\begin{array}{l} \mathrm{N}^2(\theta,s)=\int_s^{\theta}\mathrm{N}(\theta,u)\,\mathrm{N}(u,s)\,du \\ \mathrm{N}^3(\theta,s)=\int_s^{\theta}\mathrm{N}(\theta,u)\,\mathrm{N}^2(u,s)\,du \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{N}^n(\theta,s)=\int_s^{\theta}\mathrm{N}(\theta,u)\,\mathrm{N}^{n-1}(u,s)\,du \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}$$

Determinando $x(\theta)$ por las formulas segunda y tercera de las [7], se determinarán $y(\theta)$; $z(\theta)$.

Las ecuaciones [1] prestan ventajas siempre que el valor absoluto de θ_1 sea pequeño, no así quando este sea grande, como se puede probar por la rapidez de convergencia de las series.

2. – Ahora procederemos á la solución en el caso que dicho valor absoluto $|\theta_1|$ sea grande. Las ecuaciones que resuelven la cuestión seran las siguientes

$$\frac{dx}{d\lambda} = y - \frac{\theta_2{}^*}{\theta_1{}^*} z$$

$$[11] \qquad \frac{dy}{d\lambda} = -x + \frac{z}{\theta_1{}^*}$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\theta_2{}^*}{\theta_1{}^*} x - \frac{y}{\theta_1{}^*}$$

siendo $\theta_1{}^*$ y $\theta_2{}^*$ funciones de la variable λ definidas por la ecuación:

$$\lambda = \int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1(\theta)\, d\theta = s(\theta)\ , \quad \text{luego} \quad \theta = \theta(\lambda) \ \text{ y } \ \theta_1(\theta) = \theta_1{}^*(\lambda)\ .$$

Integrando la primera de las [11] se tiene

$$[12] \qquad x(\lambda) = a + \int_0^{\lambda} y\, d\lambda - \int_0^{\lambda} \frac{\theta_2{}^*}{\theta_1{}^*} z\, d\lambda\ ;$$

se remplazarà successivamente $x(\lambda)$ por su valor dado por la misma fórmula y se repitirà esta operación al infinito, teniendo en cuenta que

$$\int_0^{\lambda} d\lambda \int_0^{\lambda} d\lambda \int_0^{\lambda} d\lambda \ \ldots\ldots \int_0^{\lambda} x\, d\lambda \to 0$$

cuando n tiende hacia el infinito.

Valiéndonos de la fórmula de DIRICHLET y haciendo para abreviar

$$
[13] \quad
\begin{aligned}
f(\lambda) &= a\cos\lambda + b\,\mathrm{sen}\,\lambda \\
\varphi(\lambda) &= -a\,\mathrm{sen}\,\lambda + b\cos\lambda \\
\psi(\lambda) &= c + a\int_0^\lambda \frac{\mathrm{sen}\,\lambda + \theta_2^*\cos\lambda}{\theta_1^*}\,d\lambda = b\int_0^\lambda \frac{\cos\lambda - \theta_2^*\,\mathrm{sen}\,\lambda}{\theta_1^*}\,d\lambda\ ,
\end{aligned}
$$

se tenien las ecuaciones

$$
[14] \quad
\begin{aligned}
x(\lambda) &= f(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{z(s)\left[\mathrm{sen}\,(\lambda-s) - \theta_2^*(s)\cos(\lambda-s)\right]}{\theta_1^*(s)}\,ds \\
y(\lambda) &= \varphi(\lambda) + \int_0^\lambda \frac{z(s)\left[\cos(\lambda-s) + \theta_2^*(s)\,\mathrm{sen}\,(\lambda-s)\right]}{\theta_1^*(s)}\,ds + \frac{\theta_2^*}{\theta_1^*}\,z \\
z(\lambda) &= \psi(\lambda) + \int_0^\lambda z(s)\,\mathrm{N}(\lambda,s)\,ds
\end{aligned}
$$

Esta última es una ecuación de segunda especie de VOLTERRA, siendo el núcleo de extructura

$$
[15] \quad
\begin{aligned}
\mathrm{N}(\lambda,s) = -\frac{1}{\theta_1^*(s)}\Bigg\{ &\int_s^\lambda \frac{\cos(\lambda-s) - \theta_2^*\,\mathrm{sen}\,(\lambda-s)}{\theta_1^*}\,d\lambda + \\
&+ \theta_2^*(s)\int_s^\lambda \frac{\mathrm{sen}\,(\lambda-s) + \theta_2^*\cos(\lambda-s)}{\theta_1^*}\,d\lambda + \frac{\theta_2^*(s)}{\theta_1^*(s)}\Bigg\}
\end{aligned}
$$

La solución de la tercera de las ecuaciones [14] está dada por la fórmula

$$
[16] \quad z(\lambda) = \psi(\lambda) + \int_0^\lambda f(s)\,\Gamma(\lambda,s,1)\,ds
$$

siendo $\Gamma(\lambda, s, 1)$ el núcleo resolvente.

El caso del Sr. K. Popoff corresponde á cuando las funciones $\theta_2(s)=0$, $\theta_2=0$, $\theta^*_2(s)=0$, $\theta_2=0$; entónces el núcleo se reduce á

$$N(\theta, s) = -\theta_1(s)\int_{\theta_0}^{\theta} \theta_1 \cos(\theta - s)\, d\theta \tag{17}$$

en el caso que $|\theta_1|$ sea pequeño, y á

$$N(\lambda, s) = -\frac{1}{\theta_1{}^*(s)} \int_{s}^{\theta} \frac{\cos(\lambda - s)}{\theta^*_1}\, d\lambda \tag{18}$$

en el caso que $|\theta_1{}^*|$ sea grande.