ACTA
Vol. III - N. 5

SUL CALCOLO DEI SIMBOLI DI RIEMANN PER ds^2 ASSEGNATI QUALSIASI (*).

CARLO TOLOTTI

SVMMARIVM. — Exhibetur generale supputationis schema quod attinet ad symbolos Riemann, metricis varietatibus quomodocumque statutis; hoc schemate vitari potest laboriosa supputatio eorum symbolorum, substitutione directe peracta in eorum expressionibus definitionis.

I. — PREFAZIONE.

Quando, occorrendo di calcolare i simboli di RIEMANN di 1ª specie $R_{ij,kl}$ o di 2ª specie $R_{i\ ,kl}^{\ h}$ per una varietà metrica V_n di assegnato elemento lineare $ds^2 = \sum_{ik}^{n}{}_{1} a_{ik} dx^i dx^k$, si voglia evitare la materiale e laboriosa sostituzione delle a_{ik} nelle espressioni generali di definizione dei detti simboli, non si ha che da cercare di rifarsi a qualcuno dei modi per introdurli globalmente.

Fra questi modi, un metodo possibile di calcolo si ha già nella via indicata dal LEVI-CIVITA nella sua classica Memoria: *Nozione di parallelismo in una varietà qualunque*... (1), in cui, in modo geometricamente luminoso, i simboli $R_{i\ ,kl}^{\ h}$ vengono introdotti per mezzo del trasporto ciclico per parallelismo di un vettore dx^h lungo il paralle-

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio T. Levi-Civita, il 30 ottobre 1938.

(1) T. LEVI-CIVITA, *Nozione di parallelismo*..., «Rend. Circ. Mat. di Palermo», vol. XLII, 1917, § 16.

logramma elementare individuato da due generici spostamenti $d'x^h$, $\delta' x^l$ spiccati dal punto considerato della V_n, e cioè, in formule:

[1] $$(d'\delta' - \delta' d')\, dx^h = \sum_{ikl}^{n} {}_1 R_i{}^h{}_{,kl}\, dx^i d'x^k \delta' x^l \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

con i differenziali terzi a primo membro (essenzialmente non invertibili) definiti mercè applicazione ripetuta delle

[2] $$\tau^h(d, \delta) = \delta dx^h + \sum_{kl}^{n} {}_1 \Gamma^h_{kl}\, dx^k \delta x^l = 0 \qquad (h = 1, \ldots, n)$$

(Γ^h_{kl} simboli di Christoffel di 2ª specie). Calcolati così dalle [1] i simboli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$, le relazioni

[3] $$\sum_{h}^{n} {}_1 a_{jh} R_i{}^h{}_{,kl} = R_{ij,kl}$$

permetterebbero poi di dedurne agevolmente quelli di 1ª specie $R_{ij,kl}$.

Si può osservare però che, sia quando si tratti del calcolo dei soli simboli $R_{ij,kl}$, e sia anche quando si tratti di quello dei simboli $R_i{}^h{}_{,kl}$, non è detto che la via precedente, che ottiene dapprima le $R_i{}^h{}_{,kl}$, sia la più adatta. Difatti i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$, per le molteplici proprietà d'invarianza dei loro moduli rispetto a scambi degli indici, dovrebbero poter prestarsi (a parità di condizioni) ad un calcolo molto più rapido che non quelli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$; e d'altra parte il lavoro di risoluzione del sistema [3], che interviene quando si subordini (come noi proponiamo) il calcolo delle $R_i{}^h{}_{,kl}$ a quello delle $R_{ij,kl}$, non va contato ai fini di un computo di economia di lavoro, dato che, come vedremo meglio in seguito, un sistema identico ha già dovuto essere risolto nella deduzione (comunque necessaria) delle formazioni contravarianti [2].

Oggetto della presente Nota è appunto, anzitutto, modificare le [1] del Levi-Civita in guisa da ottenerne delle relazioni semplici che introducano direttamente i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$, ed indi mostrare come sulla base di esse, sfruttando le molteplici proprietà di detti simboli, si possa pervenire ad uno schema generale di calcolo dei simboli di RIEMANN molto rapido e semplice, valido per un qualsiasi tipo di ds^2.

È interessante notare che mentre, nell'ambito delle relazioni che trovano la loro interpretazione geometrica nella teoria del parallelismo di LEVI-CIVITA, non siamo riusciti a modificare le [1] in guisa da renderle adatte al calcolo diretto delle $R_{ij,kl}$, a tale intento siamo invece pervenuti acconsentendo a porsi in un altro sistema di differenziali (geometricamente molto meno significativo) che il PÉRÈS ha considerato ed illustrato in una sua Nota (1) destinata a chiarire una discussa (2) relazione (3) mediante la quale il RIEMANN caratterizzava il comportamento covariante dei suoi simboli $R_{ij,kl}$. Mostreremo anzi che le relazioni, da noi dedotte dalle [1] in questo nuovo sistema di differenziali, si rivelano, per mezzo di un'elegante formula del LIPSCHITZ (4), non essere altro che la citata relazione originaria del RIEMANN, analizzata nella sua struttura formale e presentata nella forma più adatta al calcolo.

A titolo d'esempio applicheremo infine il nostro schema generale al calcolo dei simboli di RIEMANN per il ds^2 relativistico

$$[4] \qquad ds^2 = V dt^2 + 2 W\, dt\, d\rho - H\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \operatorname{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

(V, W, H funzioni soltanto di t, ρ; inoltre $V > 0$, $H > 0$). Nel caso particolare $W = 0$, detto calcolo fu già da noi eseguito per altra via meno rapida in una nostra Nota di alcuni anni or sono (5). La generalizzazione al caso $W \neq 0$ corrisponde, nell'interpretazione cosmologica, all'ammettere che, nel sistema di coordinate per cui la metrica considerata

(1) J. PÉRÈS, *A propos de la notion de parallélisme...*, «Rend. Acc. Lincei», serie 5ª, vol. XXIX, 1920, pag. 134-138; cfr. anche M. R. FABBRI, *Sui differenziali d'ordine superiore*, «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XXI, 1935, pag. 543-546.

(2) Cfr. T. LEVI-CIVITA, Mem. cit., pag. 202.

(3) B. RIEMANN, *Commentatio Mathematica*, «Ges. Werke», Leipzig, 1876, pag. 380 ss.

(4) R. LIPSCHITZ, *Bemerkungen zu dem Princip des kleinsten Zwanges*, «Journ. f. reine u. ang. Mathematik», v. 82, 1876, pag. 316-321.

(5) C. TOLOTTI, *Calcolo del tensore di Ricci-Einstein nel caso ortogonale*, «Rend. Acc. Lincei», serie 6ª, vol. XXI, 1935, pag. 326-332.

assume la forma semplice [4], possa non valere l'isotropia della propagazione della luce (¹).

II. — INTRODUZIONE DIRETTA DEI SIMBOLI DI PRIMA SPECIE $R_{ij,kl}$.

Cerchiamo anzitutto di modificare le [1] del LEVI-CIVITA in guisa da ottenerne delle relazioni semplici che introducano direttamente i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$.

Conformemente alle assunzioni della teoria del parallelismo, nelle [1] i differenziali terzi (essenzialmente non invertibili) vanno ottenuti (proprietà associativa) mercè applicazione ripetuta della definizione [2] dei differenziali secondi. Le [1] divengono così

$$[1'] \qquad \delta' \sum_{kl}^{n} \Gamma^h_{kl}\, dx^k d'x^l - d' \sum_{kl}^{n} \Gamma^h_{kl}\, dx^k \delta' x^l = \sum_{ikl}^{n} R_i{}^h{}_{,kl}\, dx_i d'x^k \delta' x^l$$

$$(h = 1, \dots, n) .$$

Si consideri ora con il PÉRÈS (cfr. Nota citata) un sistema di differenziali in cui, pur conservando per i differenziali secondi la definizione [2] del LEVI-CIVITA, si rinunci alla proprietà associativa dei differenziali terzi assumendo per essi dei differenziali che siano invece invertibili. Ad esempio si può assumere come valore di $d'\delta' dx^h$ (indipendentemente dall'ordine di differenziazione) la media aritmetica dei tre differenziali distinti $d'\delta' dx^h$, $\delta' d' dx^h$, $dd'\delta' x^h$ della teoria del parallelismo.

Poichè le [1'] non contengono differenziali terzi, e non essendosi, d'altra parte, cambiata la definizione [2] dei differenziali secondi, ne segue che le [1'] restano valide anche nel nuovo sistema di differen-

(¹) Cfr. T. LEVI-CIVITA, *Fondamenti di meccanica relativistica*, Bologna, « Zanichelli », 1928, pag. 59.

ziali introdotto. Ma, per la proprietà commutativa dei nuovi differenziali, le differenze

$$\delta' d' dx^h - d' \delta' dx^h \qquad (h=1, \dots, n)$$

risultano nulle. Esse possono quindi venire aggiunte indifferentemente ai primi membri delle [1'], con che queste divengono

$$\delta' \tau^h (d, d') - d' \tau^h (d, \delta') = \sum_{ikl}^{n} {}_1 \mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}\, dx^i d' x^k \delta' x^l \qquad (h=1, \dots, n).$$

Moltiplicando ambo i membri di esse per a_{jh} e sommando rispetto ad h, si ha infine, in virtù delle [2],

[5] $$\delta' \tau_j (d, d') - d' \tau_j (d, \delta') = \sum_{1}^{n}{}_{ikl} \mathrm{R}_{ij,kl}\, dx^i d' x^k \delta' x^l \qquad (j=1, \dots, n)$$

dove si sono introdotte le formazioni covarianti

$$\tau_j (d, \delta) = \sum_{1}^{n}{}_h a_{jh} \tau^h (d, \delta) = \sum_{1}^{n}{}_h a_{jh} \delta dx^h + \sum_{1}^{n}{}_{kl} \Gamma_{j,kl}\, dx^k \delta x^l \quad (j=1, \dots, n)$$

($\Gamma_{j,kl}$ simboli di CHRISTOFFEL di 1ª specie).

Le [5] sono le relazioni che desideravamo stabilire e la cui pratica utilità per il calcolo dei simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$ illustreremo nei prossimi paragrafi. Come abbiamo mostrato, esse sono valide nel sistema di differenziali del PÉRÈS e non in quello della teoria del parallelismo.

III. — CONFRONTO CON UNA CLASSICA RELAZIONE DEL RIEMANN.

È interessante mettere in rilievo in che rapporto stiano le [5], da noi stabilite, colla relazione del RIEMANN a cui accennavamo nella prefazione, e cioè colla relazione

$$\text{[6]} \qquad \mathrm{R} = -2\mathrm{I}$$

essendo

$$\text{[7]} \qquad \mathrm{R} = d^2 \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \delta x^i \delta x^k - 2 d\delta \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} dx^i \delta x^k + \delta^2 \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} dx^i dx^k ,$$

e

$$\mathrm{I} = \sum_{1}^{n}{}_{ijkl} \mathrm{R}_{ij,kl}\, dx^i \delta x^j dx^k \delta x^l .$$

A tale scopo osserveremo con il LIPSCHITZ (cf. paragrafo I) che, poichè è identicamente

$$\text{[8]} \qquad d \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik} \delta x^i \delta x^k = 2 \sum_{1}^{n}{}_{j} \tau_j(d,\delta)\, \delta x^j$$

$$\text{[8']} \qquad 2d \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\, \delta x^i \delta x^k - \delta \sum_{1}^{n}{}_{ik} a_{ik}\, dx^i dx^k = 2 \sum_{1}^{n}{}_{j} \tau_j(d,d)\, \delta x^j ,$$

l'espressione [7] della R del RIEMANN si può trasformare nella seguente

$$\text{[9]} \qquad \mathrm{R} = 2d \sum_{1}^{n}{}_{j} \tau_j(d,\delta)\, \delta x^j - 2\delta \sum_{1}^{n}{}_{j} \tau_j(d,d)\, \delta x^j$$

Con questa trasformazione [9] dovuta al LIPSCHITZ e tenendo presente che con i differenziali secondi [2] è $\tau_j(d,\delta) = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$, è facile riconoscere che le [5], in cui si faccia $d' = d$, $\delta' = \delta$, moltiplicate per δx^j e sommate rispetto a j, danno appunto la [6] del RIEMANN.

Le relazioni [5] da noi scritte al paragrafo precedente si rivelano così non essere altro che l'originaria relazione di RIEMANN analizzata intimamente nella sua struttura formale e presentata nella forma più adatta al calcolo pratico. Il loro interesse consiste quindi anche nel fatto che esse forniscono una giustificazione diretta della relazione del RIEMANN, giustificazione che, forse non cedendo in eleganza a quella indiretta del PÉRÈS (cfr. paragrafo I), presenta rispetto a questa il vantaggio di mettere in evidenza il meccanismo formale del processo con cui da R, per opportune associazioni di termini, si viene a formare $-2\mathrm{I}$.

IV. — SCHEMA GENERALE DI CALCOLO DEI SIMBOLI $\mathrm{R}_{ij,kl}$ e $\mathrm{R}_i{}^h{}_{,kl}$.

Venendo alla pratica applicazione delle [5] al calcolo dei simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$, osserveremo che essa richiede le seguenti successive operazioni:

a) preparare le espressioni covarianti $\tau_j(d, d')$, il che si può fare agevolmente ricorrendo, ad esempio, alla [8'];

b) ricavare dalle $\tau_j(d, d') = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ le espressioni dei differenziali secondi $d'dx^h$; cosa alquanto faticosa se il ds^2 assegnato non è ortogonale, ma che ad ogni modo non ci è sembrata potersi evitare;

c) eseguire le differenziazioni $\delta' \tau_j(d, d')$ $(j = 1, \ldots, n)$ sostituendo i differenziali secondi colle espressioni trovate e avendo cura di semplificare gli sviluppi col non scrivere affatto tutti quei termini (o gruppi di termini) che contengono simmetricamente i due operatori d' e δ', dato che poi nella successiva operazione *d*) detti termini verrebbero ad eliminarsi;

d) scambiare nelle espressioni trovate d' con δ' e formare le differenze $\delta' \tau_j(d, d') - d' \tau_j(d, \delta')$ $(j = 1, \ldots, n)$.

Ma (e ciò è l'essenziale vantaggio della via da noi seguita rispetto a quella suggerita dalle [1] del LEVI-CIVITA) per ottenere tutti i simboli $\mathrm{R}_{ij,kl}$ non è necessario sviluppare completamente tutte le n espressioni $\delta'\tau_j(d, d') - d'\tau_j(d, \delta')$. Difatti poichè, in virtù di note proprietà dei simboli di 1ª specie, è

$$R_{ij,kl} = R_{ji,lk} = R_{kl,ij} = R_{lk,ji} \; ,$$

si può, senza alterare il valore del simbolo considerato $R_{ij,kl}$, far comparire sempre come secondo indice uno qualsiasi dei quattro indici di cui è dotato. Ne segue che le operazioni c), d) possono essere sostituite dal seguente schema ridotto:

c') sviluppare $\delta'\tau_1(d, d')$ trascurando la parte simmetrica in d', δ'; formare la differenza $\delta'\tau_1(d, d') - d'\tau_1(d, \delta')$ ottenendo così tutti i simboli $R_{ij,kl}$ di cui almeno un indice è eguale ad 1;

c'') sviluppare $\delta'\tau_2(d, d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in d', δ', tutti quei termini che verrebbero a contenere differenziali primi operanti su x^1; nella corrispondente differenza $\delta'\tau_2(d, d') - d'\tau_2(d, \delta')$ verranno a comparire così solamente quei simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice eguale a 2 e nessun indice eguale ad 1;

c''') sviluppare $\delta'\tau_3(d, d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in d', δ', tutti quei termini che verrebbero a contenere differenziali primi operanti su x^1 o x^2; nella corrispondente differenza $\delta'\tau_3(d, d') - d'\tau_3(d, \delta')$ verranno a comparire così solamente quei simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice eguale a 3 e nessun indice eguale ad 1 o 2;

e così via fino a:

$c^{(n-1)}$) sviluppare $\delta'\tau_{n-1}(d, d')$ tenendo conto dei soli termini (non simmetrici in d', δ') che contengono esclusivamente differenziali primi operanti su x^{n-1} e x^n e formare la corrispondente differenza $\delta'\tau_{n-1}(d, d') - d'\tau_{n-1}(d, \delta')$.

Ottenuti così dalle [5] i simboli di 1ª specie $R_{ij,kl}$, per ottenere anche quelli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$ non si ha che da applicare al sistema [3], per ogni fissati i, k, l, le formule risolutive già dovute costruire in b) per risolvere le $\tau_j(d, d') = 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ rispetto ai differenziali secondi. Riteniamo quindi il nostro metodo vantaggioso e di pratica utilità anche per il calcolo dei simboli di 2ª specie $R_i{}^h{}_{,kl}$, giacchè la difficoltà della risoluzione del sistema [3] (risoluzione alquanto faticosa per ds^2 non ortogonali) che s'incontra nella nostra via che subordina il calcolo delle $R_i{}^h{}_{,kl}$ a quello delle $R_{ij,kl}$ è una difficoltà che già interviene indipendentemente da ciò in ogni metodo di calcolo dei simboli di RIEMANN in cui non si riesca ad evitare la formazione delle espressioni contravarianti $\tau^h(d, d')$.

V. — APPLICAZIONE AL CALCOLO DEI SIMBOLI DI RIEMANN PER IL ds^2 [4].

A titolo d'esempio applicheremo qui infine il precedente schema di calcolo per ottenere i simboli $R_{ij,kl}$ relativi al ds^2 (cfr. paragrafo I)

[4] $$ds^2 = V dt^2 + 2W dt\, d\rho - H\left[d\rho^2 + \rho^2(d\theta^2 + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi^2)\right],$$

(V, W, H funzioni soltanto di t, ρ; $V > 0$, $H > 0$), appartenente ad una metrica cronotopica dotata di completa simmetria (geometrica e cinematica) attorno ad un centro ed in cui, nel semplice sistema di riferimento scelto, può non valere l'isotropia della propagazione della luce.

Identificando le variabili t, ρ, θ, φ rispettivamente con x^0, x^1, x^2, x^3, si ha dalla [8']

$$\tau_0(d, d') = V\, d\, d't + W\, d\, d'\rho + \frac{1}{2}\dot{V}\, dt\, d't + \frac{1}{2}V'(dt\, d'\rho + d't\, d\rho) +$$
$$+ \left(W' - \frac{1}{2}\dot{H}\right) d\rho\, d'\rho + \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}(d\theta\, d'\theta + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi\, d'\varphi),$$

$$\tau_1(d, d') = W\, d\, d't - H\, d\, d'\rho + \left(\dot{W} - \frac{1}{2}V'\right) dt\, d't - \frac{1}{2}\dot{H}(dt\, d'\rho + d't\, d\rho) -$$
$$- \frac{1}{2}H'\, d\rho\, d'\rho + \frac{1}{2}(\rho^2 H)'(d\theta\, d'\theta + \mathrm{sen}^2\theta\, d\varphi\, d'\varphi),$$

$$\tau_2(d, d') = -\rho^2 H\, d\, d'\theta - \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}(dt\, d'\theta + d't\, d\theta) -$$
$$- \frac{1}{2}(\rho^2 H)'(d\rho\, d'\theta + d'\rho\, d\theta) + \rho^2 H\, \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, d\varphi\, d'\varphi,$$

$$\tau_3(d, d') = -\rho^2 H\, \mathrm{sen}^2\theta\, d\, d'\varphi - \frac{1}{2}\rho^2\dot{H}\, \mathrm{sen}^2\theta\, (dt\, d'\varphi + d't\, d\varphi) -$$
$$- \frac{1}{2}(\rho^2 H)'\mathrm{sen}^2\theta\, (d\rho\, d'\varphi + d'\rho\, d\varphi) - \rho^2 H\, \mathrm{sen}\,\theta \cos\theta\, (d\theta\, d'\varphi + d'\theta\, d\varphi),$$

dove il punto denota derivazione rispetto a t e l'apice (quando non sia applicato al simbolo d' di differenziazione) denota derivazione rispetto a ρ.

Formiamoci ora quelle parti delle espressioni $\delta'\tau_j(d,d')$ $(j=0,\dots,3)$ che, come abbiamo visto al paragrafo precedente, sono sufficienti a darci tutti i simboli $R_{ij,kl}$. Poichè è a nostro arbitrio la scelta di quale delle $\delta'\tau_j(d,d')$ si vuole sviluppare più completamente delle altre, sceglieremo la più semplice: $\delta'\tau_2(d,d')$. Eseguendo le differenziazioni che in essa compaiono e sostituendo ai differenziali secondi le espressioni che si ottengono coll'eguagliare a zero le $\tau_j(d,d')$ $(j=0,1,2,3)$ ora calcolate, si ha, posto $D=HV+W^2$,

[10]

$$\begin{aligned}
\delta'\tau_2(d,d') = {} & \left[\frac{1}{4}\rho^2\frac{\dot{H}^2}{H}\right] dt\,d't\,\delta'\theta + \left[-\frac{1}{2}\rho^2\left(\ddot{H}-\frac{\dot{H}^2}{H}\right)+\frac{1}{2D}\rho^2\dot{H}\left(\frac{1}{2}H\dot{V} - \right.\right. \\
& \left.\left. -\frac{1}{2}V'W+W\dot{W}\right)+\frac{1}{2D}(\rho^2H)'\left(\frac{1}{2}VV'+\frac{1}{2}\dot{V}W-V\dot{W}\right)\right] dt\,d'\theta\,\delta't + \\
& + \left[\frac{\dot{H}}{4H}(\rho^2H)'\right](d\rho\,d't+d'\rho\,dt)\,\delta'\theta + \left[-\frac{1}{2}(\rho^2\dot{H})'+\frac{\dot{H}}{2H}(\rho^2H)' + \right. \\
& \left. +\frac{1}{4D}\rho^2\dot{H}(HV'-\dot{H}W)+\frac{1}{4D}(\rho^2H)'(\dot{H}V+V'W)\right](d\rho\,\delta't+\delta'\rho\,dt)\,d'\theta + \\
& + \left[\frac{1}{4\rho^2H}(\rho^2H)'^2\right] d\rho\,d'\rho\,\delta'\theta + \left[\frac{1}{2\rho^2H}(\rho^2H)'^2-\frac{1}{2}(\rho^2H)''+\frac{1}{2D}\rho^2\dot{H}\left(\frac{1}{2}H\dot{H} - \right.\right. \\
& \left.\left. -\frac{1}{2}H'W+HW'\right)+\frac{1}{2D}(\rho^2H)'\left(\frac{1}{2}H'V+\frac{1}{2}\dot{H}W+WW'\right)\right] d\rho\,d'\theta\,\delta'\rho + \\
& + \left[-\rho^2H\,\mathrm{sen}^2\theta\right] d\varphi\,d'\varphi\,\delta'\theta + \frac{\mathrm{sen}^2\theta}{4D}\left[H(\rho^2\dot{H})^2+2\rho^2\dot{H}(\rho^2H)'W - \right. \\
& \left. - V(\rho^2H)'^2\right] d\varphi\,d'\theta\,\delta'\varphi + \dots
\end{aligned}$$

dove i puntini finali denotano la parte trascurata simmetrica in d', δ' (comprendente tra l'altro anche i differenziali terzi per la loro supposta invertibilità).

La [10] ci permette intanto di ricavare tutti i simboli $R_{ij,kl}$ che hanno almeno un indice uguale a 2. Precisamente, confrontandola con quella delle [5] che corrisponde a $j=2$, si deduce

$$R_{02,02}=\frac{1}{2}\rho^2\left(\ddot{H}-\frac{\dot{H}^2}{2H}\right)-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(H\dot{V}-V'W+2W\dot{W})+$$
$$+(\rho^2 H)'(VV'+\dot{V}W-2V\dot{W})\Big],$$

$$R_{02,12}=\frac{1}{2}(\rho^2\dot{H})'-\frac{\dot{H}}{4H}(\rho^2 H)'-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(HV'-\dot{H}W)+$$
$$+(\rho^2 H)'(\dot{H}V+V'W)\Big],$$

$$R_{12,12}=\frac{1}{2}(\rho^2 H)''-\frac{1}{4\rho^2 H}(\rho^2 H)'^2-\frac{1}{4D}\Big[\rho^2\dot{H}(H\dot{H}-H'W+2HW')+$$
$$+(\rho^2 H)'(H'V+\dot{H}W+2WW')\Big],$$

$$R_{32,32}=-\rho^2 H\operatorname{sen}^2\theta-\frac{\operatorname{sen}^2\theta}{4D}\Big[H(\rho^2\dot{H})^2+2\rho^2\dot{H}W(\rho^2 H)'-V(\rho^2 H)'^2\Big];$$

inoltre tutte le altre $R_{ij,kl}$ aventi almeno un indice eguale a 2 sono nulle oppure si possono portare a coincidere (a meno del segno) con uno dei precedenti quattro simboli mediante opportuni scambi degli indici.

Occorrerebbe ora sviluppare $\delta'\tau_3(d,d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in d', δ', anche i termini contenenti differenziali primi operanti su θ. Ma questo sviluppo non è necessario perchè un semplice confronto delle espressioni di $\tau_2(d,d')$ e $\tau_3(d,d')$ mostra che si giungerebbe così al secondo membro della [10] moltiplicato per $\operatorname{sen}^2\theta$ dopo aver omessi i termini in $d\varphi$ ed aver scambiato θ con φ. Ne segue

$$R_{03,03}=\operatorname{sen}^2\theta\, R_{02,02}\,,\quad R_{03,13}=\operatorname{sen}^2\theta\, R_{02,12}\,,\quad R_{13,13}=\operatorname{sen}^2\theta\, R_{12,12}$$

e che inoltre tutti gli altri simboli $R_{ij,kl}$ aventi almeno un indice eguale a 3 e nessuno eguale a 2 sono o nulli o riconducibili ai tre simboli ora scritti.

Ci restano ancora da calcolare i simboli $R_{ij,kl}$ con i soli indici 0 ed 1. A tal scopo sviluppiamo $\delta'\tau_1(d,d')$ trascurando, oltre la parte simmetrica in d', δ', tutti i termini contenenti differenziali primi operanti su θ o su φ. Si ha:

[11]

$$\begin{aligned}\delta'\tau_1(d,d) = \Big[\dot{W}' - \frac{1}{2}V'' + \frac{1}{2D}\Big(\frac{1}{2}V' - \dot{W}\Big)(HV' - \dot{H}W) + \frac{\dot{H}}{4D}(\dot{H}V + \\ + V'W) - \frac{W'}{D}\Big(\frac{1}{2}H\dot{V} - \frac{1}{2}V'W + W\dot{W}\Big) + \frac{H'}{D}\Big(\frac{1}{2}VV' + \frac{1}{2}\dot{V}W - \\ - V\dot{W}\Big)\Big] dt\, d't\, \delta'\rho + \Big[-\frac{1}{2}\ddot{H} - \frac{\dot{W}}{2D}(HV' - \dot{H}W) + \frac{\dot{H}}{2D}(\dot{H}V + V'W) + \\ + \frac{\dot{H}}{2D}\Big(\frac{1}{2}H\dot{V} - \frac{1}{2}V'W + W\dot{W}\Big) + \frac{H'}{2D}\Big(\frac{1}{2}VV' + \frac{1}{2}\dot{V}W - V\dot{W}\Big)\Big] dt\, d'\rho\, \delta't + \ldots\end{aligned}$$

dove i puntini finali denotano la parte trascurata.

Confrontando la [11] con quella delle [5] che corrisponde a $j=1$, si deduce infine:

$$\begin{aligned}R_{01,01} = \frac{1}{2}(\ddot{H} - V'') + \dot{W}' + \frac{1}{4D}\Big[V'(HV' - \dot{H}W) - \dot{H}(\dot{H}V + V'W) - \\ - (\dot{H} + 2W')(H\dot{V} - V'W + 2W\dot{W}) + H'(VV' + \dot{V}W + 2V\dot{W})\Big],\end{aligned}$$

gli altri simboli cogli indici 0 ed 1 essendo nulli o riconducibili a $R_{01,01}$.