ACTA
Vol. III - N. 14

GLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NELLE VIBRAZIONI ELASTICHE (*)

(NOTA II)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Aequationes, quae superiore Nota inventae sunt, applicantur ad studium vibrationum liberarum vel coactarum alicuius tubi cylindrici indefiniti; ostenditur autem novas frequentias ac novas possibiles resonantias introduci si quis etiam ad elementa secundi ordinis attendat.

1. – Come applicazione delle cose dette nella Nota precedente, prendiamo a considerare le vibrazioni di un tubo cilindrico indefinito sulle cui pareti agiscano pressioni dipendenti dal tempo e periodiche, come può ad esempio avvenire in una condotta d'acqua forzata, in seguito a variabilità del flusso, ovvero in una canna da sparo, quando l'esplosivo abbia difetto di granitura o di distribuzione.

La considerazione degli elementi del secondo ordine introdurrà, come vedremo, nuove frequenze e nuove possibili risonanze.

Sulle componenti dello spostamento elastico, in coordinate cilindriche $r\, z\, \theta$, faremo la seguente ipotesi:

$$u_r = u(r,t) \quad , \quad u_z = 0 \quad , \quad u_\theta = 0 \ ,$$

per modo che, come è facile calcolare in base a quanto abbiamo esposto in precedenza, le componenti di deformazione, in coordinate $r\, z\, \theta$, saranno:

$$e_{rr} = \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 , \quad e_{\theta\theta} = \frac{u}{r} + \frac{1}{2}\frac{u^2}{r^2} \ , \quad e_{zz} = 0$$

$$e_{r\theta} = e_{z\theta} = e_{rz} = 0 \ .$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, l'8 ottobre 1939.

L'energia potenziale elastica è data da:

$$\mathrm{L} = \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)^2 - (\mathrm{M}-\mathrm{N})\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mathrm{M}}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{u^2}{r^2}\right] - \\ - \frac{\mathrm{M}-\mathrm{N}}{2}\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{u}{r}\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) ,$$

ove si è tenuto conto fino agli elementi del terzo ordine.

Indicato con $d\mathrm{S}$ l'elemento di volume dello spazio elastico e con $d\sigma$ un elemento del contorno, infine con P_r lo sforzo normale a questo, otterremo dal principio variazionale:

$$\delta\int_{t_0}^{t_1}\left[\mathrm{T} - \int_s \mathrm{L}\, d\mathrm{S}\right] dt + \int_{t_0}^{t_1} dt \int_\sigma \mathrm{P}_r\, \delta r \cdot d\sigma ,$$

l'equazione del moto vibratorio e le condizioni al contorno.

Per scriverle in breve, porremo:

$$\mathrm{F}(u) \equiv \frac{3\mathrm{M}-\mathrm{N}}{2r}\left[\frac{u^2}{r^2} - \left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2\right] - 3\mathrm{M}\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} - \\ - \mathrm{N}\frac{u}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\right) - \mathrm{N}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right)$$

$$f(u) \equiv -\left[\frac{3}{2}\mathrm{M}\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{\mathrm{N}}{2}\frac{u^2}{r^2} + \mathrm{N}\frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right]$$

e porremo anche:

$$\mathrm{L}(y) \equiv \mathrm{M}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{y}{r}\right)$$

$$l(y) \equiv \mathrm{M}\frac{\partial y}{\partial r} + \mathrm{N}\frac{y}{r}$$

Se le pressioni sulle pareti sono espresse da:

$$\mathrm{P}_r = -\sum_i \mathrm{P}_i \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) , \quad \text{sulla parete interna} \quad (r = a)$$

$$\mathrm{P}_r = -\sum_i \mathrm{Q}_i \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) , \quad \text{sulla parete esterna} \quad (r = b) ,$$

si avrà l'equazione indefinita:

$$-\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\mathrm{L}(u)=\mathrm{F}(u)$$

e al contorno:

$$\Big[l(u)\Big]_{r=a}=\Big[f(u)\Big]_{r=a}-\sum_i \mathrm{P}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$\Big[l(u)\Big]_{r=b}=\Big[f(u)\Big]_{r=b}-\sum_i \mathrm{Q}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

dove è importante rilevare che $\mathrm{F}(u)$ ed $f(u)$ sono di secondo grado nelle u e loro derivate.

Posto:

$$u=\sigma\mathrm{V}+\sigma^2\mathrm{W}\quad,$$

dove σ è quantità piccola per cui si possono trascurare i termini in σ^3, potremo stabilire il conguaglio fra i termini contenenti σ al primo grado, separatamente dal conguaglio fra i termini che contengono σ al secondo grado. Nelle equazioni che così si ottengono, si metta poi v in luogo di $\sigma\mathrm{V}$, e w in luogo di $\sigma^2\mathrm{W}$, e si avranno per v e w rispettivamente le seguenti equazioni e condizioni:

$$-\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2}+\mathrm{L}(v)=0$$

[1]
$$\Big[l(v)\Big]_{r=a}=-\sum_i \mathrm{P}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$\Big[l(v)\Big]_{r=b}=-\sum_i \mathrm{Q}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

$$-\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\mathrm{L}(w)=\mathrm{F}(v)$$

[2]
$$\Big[l(w)\Big]_{r=a}=\Big[f(v)\Big]_{r=a}$$

$$\Big[l(w)\Big]_{r=b}=\Big[f(v)\Big]_{r=b}$$

essendo:

[3] $$u = v + w$$

2. – Prima di affrontare i problemi [1] e [2], ne risolveremo due altri, l'uno in questo paragrafo, l'altro nel successivo. Ci occupiamo qui del problema omogeneo:

[4] $$\begin{gathered} -\rho \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} + \mathrm{L}(g) = 0 \\ l(g) = 0\,, \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases}. \end{gathered}$$

Posto:

[5] $$g_n = \cos(p_n t + \omega_n) \cdot \psi_n(r)$$

[6] $$g = \sum \mathrm{A}_n g_n\,,$$

si trova per ψ_n:

[7] $$-\rho p_n^2 \psi_n + \mathrm{L}(\psi_n) = 0$$

[8] $$l(\psi_n) = 0\,, \quad \text{per} \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases}.$$

Un sistema fondamentale di soluzioni della [7] è dato da:

[9] $$c_1 \mathrm{J}_1(rh_n) + c_2 \mathrm{Y}_1(rh_n)$$

[10] $$\left(\text{per } h_n = \sqrt{\frac{\rho p_n^2}{\mathrm{M}}}\right),$$

dove J_1 Y_1 sono le funzioni di Bessel, rispettivamente di prima e di seconda specie, e del primo ordine.

Posto:

$$[11] \qquad \chi(r,h) \equiv \left[h\mathrm{M}\,\mathrm{J}_1'(rh) + \frac{\mathrm{N}}{r}\,\mathrm{J}_1(rh)\right] \Big/ \left[h\mathrm{M}\,\mathrm{Y}_1'(rh) + \frac{\mathrm{N}}{r}\,\mathrm{Y}_1(rh)\right]$$

e sostituita la [9] nella [8], si trova:

$$[12] \qquad \chi(a,h) = \chi(b,h) = -\frac{c_2}{c_1}$$

L'eguaglianza dei due primi membri della [12] costituisce per la [7] l'equazione degli autovalori h_n ossia, per la [4] e [5], *l'equazione delle frequenze p_n delle vibrazioni libere.* Poichè l'equazione [7] rientra nel tipo di equazione autoaggiunta:

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + \left[q(x) + \lambda\, r(x)\right] y = 0 \quad ,$$

dove è:

$$\left.\begin{array}{l} p(x) = x > 0 \\ q(x) = -\dfrac{1}{x} \neq 0 \\ r(x) = n k^2 x > 0 \end{array}\right\} \text{per} \quad a \leqslant x \leqslant b \quad ,$$

allora, attese le condizioni ai limiti [8], gli autovalori sono, come è noto, tutti reali, ed a ciascuno di essi corrisponde una sola autofunzione, essendo dalla [12], il rapporto $c_2 : c_1$ univocamente determinato.

Assunto $c = 1$, risulterà, a norma delle [5], [6], [9] e [12]:

$$[13] \qquad g = \sum \mathrm{E}_n \cos(p_n t + \omega_n)\left[\mathrm{J}_1(rh_n) - \chi(a,h_n)\cdot \mathrm{Y}_1(rh_n)\right]$$

dove h_n ha il significato [10].

La [13] è l'espressione dello spostamento elastico, nella comune approssimazione, dovuto alle frequenze *libere*.

3. – Consideriamo adesso il problema seguente:

$$[14]\qquad \begin{aligned} &-\rho\frac{\partial^2 G}{\partial t^2}+L(G)=\Phi(r)\cos(\lambda t+\mu)\\ &l(G)=\chi(r)\cos(\lambda t+\mu)\quad \text{per}\ \begin{cases} r=a\\ r=b\end{cases}\end{aligned}$$

Poniamo:

$$[15]\qquad R=Ar+Br^2+Cr^3+Dr^4$$

$$[16]\qquad G=R\cos(\lambda t+\mu)+H\quad,$$

ed allora il problema [14] si trasforma nell'altro:

$$\begin{aligned} &-\rho\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+L(H)=\left[\Phi(r)-\lambda^2\rho R-L(R)\right]\cos(\lambda t+\mu)\\ &l(H)=l(G)-l(R)\cos(\lambda t+\mu)\quad \text{per}\ \begin{cases} r=a\\ r=b\end{cases}\end{aligned}$$

Poniamo per brevità:

$$[17]\qquad \gamma(r)\equiv\Phi(r)-\lambda^2\rho R-l(R)$$

e teniamo conto del valore di $l(G)$ dato in [14]; potremo scrivere:

$$[18]\qquad \begin{aligned} &-\rho\frac{\partial^2 H}{\partial t^2}+L(H)=\gamma(r)\cos(\lambda t+\mu)\\ &l(H)=\left[\chi(r)-l(R)\right]\cos(\lambda t+\mu)\quad \text{per}\ \begin{cases} r=a\\ r=b\end{cases}\end{aligned}$$

Possiamo ora scegliere le quattro costanti A B C D in modo che risultino soddisfatte le quattro equazioni algebriche, lineari in A B C D, seguenti:

$$[19] \qquad \begin{gathered} \left[l(\gamma)\right]_{r=a} = 0 \;,\quad \left[l(\gamma)\right]_{r=b} = 0 \;, \\ \chi(a) - \left[l(\mathrm{R})\right]_{r=a} = 0 \;,\quad \chi(b) - \left[l(\mathrm{R})\right]_{r=b} = 0 \;. \end{gathered}$$

Le [18] assumeranno la forma:

$$[20] \qquad \begin{gathered} -\rho\frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial t^2} + l(\mathrm{H}) = \gamma(r)\cos(\lambda t + \mu) \\ l(\mathrm{H}) = 0 \begin{cases} \text{per } r = a \\ \text{per } r = b \end{cases} . \end{gathered}$$

Sarà inoltre verificata l'importante circostanza, che $\gamma(r)$ soddisfa alle condizioni: $l(\gamma) = 0$, per $r = a, b$ (espresse dalle due prime delle equazioni [19]); soddisfa cioè alle stesse condizioni ai limiti [8], cui soddisfano le autofunzioni.

Segue che $\gamma(r)$ è sviluppabile in serie uniformemente convergente delle ψ_n, e potremo scrivere:

$$\gamma(r) = \sum \mathrm{A}_n \psi_n(r)$$

Posto allora:

$$[21] \qquad \mathrm{H} = \sum \varphi_n(t) \cdot \psi_n(r) \;,$$

avremo:

$$\sum \left[-\rho\ddot{\varphi}_n\psi_n + \varphi_n \mathrm{L}(\psi_n)\right] = \sum \mathrm{A}_n \cos(\lambda t + \mu)\,\psi_n \quad ;$$

ovvero, per la [7]:

$$\sum \left[\rho \ddot{\varphi}_n + p_n^2 \varphi_n - A_n \cos(\lambda t + \mu)\right] \cdot \psi_n = 0$$

che si soddisfa assumendo:

$$[22] \qquad \varphi_n = c_n \cos(p_n t + \eta_n) + \frac{A_n}{\rho(\lambda^2 - p_n^2)} \cos(\lambda t + \mu) \ .$$

La [22] mette in vista il fenomeno di risonanza per λ che tende verso p_n, in quanto il termine n^{mo} dell'espressione H, data dalla [21], cresce in tal caso indefinitamente.

4. – Tanto il problema [1] che il problema [2], rientrano in quello più generale impostato nelle [14]; [1] vi rientra quando si ponga:

$$[23] \qquad \chi_i(a) = - P_i \ ; \quad \chi_i(b) = - Q_i \ ; \quad v = \sum_i v_i$$

dove v_i soddisfi a:

$$- \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + L(v_i) = 0$$

$$l(v_i) = \chi_i(r) \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) \ \text{ per } \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases} .$$

Porremo allora, a norma della [15]:

$$v_i = R \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) + H$$

ed otterremo, per le quattro costanti A B C D, le equazioni seguenti, che si deducono dalle [17] e [19]:

$$- \lambda^2 \rho\, l(R) - l\big(l(R)\big) = 0 \ \text{ per } \begin{cases} r = a \\ r = b \end{cases}$$

$$- P_i - \big[l(R)\big]_a = 0 \ , \quad - Q_i - \big[l(R)\big]_b = 0 \ ,$$

ovvero, esplicitando:

$$-\mathrm{A}\left[\lambda^2\rho(\mathrm{M}-\mathrm{N})+\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2}{a}\right]-\mathrm{B}\left[\lambda^2\rho(2\mathrm{M}+\mathrm{N})a+\right.$$
$$\left.+(2\mathrm{M}^2+3\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)\right]-\mathrm{C}\left[\lambda^2\rho(3\mathrm{M}+\mathrm{N})a^2+(6\mathrm{M}^2+5\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)a\right]-$$
$$-\mathrm{D}\left[\lambda^2\rho(4\mathrm{M}+\mathrm{N})a^3+(12\mathrm{M}^2+7\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)a^2\right]=0$$

$$-\mathrm{A}\left[\lambda^2\rho(\mathrm{M}-\mathrm{N})+\frac{\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2}{b}\right]-\mathrm{B}\left[\lambda^2\rho(2\mathrm{M}+\mathrm{N})b+\right.$$
$$\left.+(2\mathrm{M}^2+3\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)\right]-\mathrm{C}\left[\lambda^2\rho(3\mathrm{M}+\mathrm{N})b^2+(6\mathrm{M}^2+5\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)b\right]-$$
$$-\mathrm{D}\left[\lambda^2\rho(4\mathrm{M}+\mathrm{N})b^3+(12\mathrm{M}^2+7\mathrm{MN}+\mathrm{N}^2)b^2\right]=0$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}+\mathrm{N})+\mathrm{B}(2\mathrm{M}+\mathrm{N})a+\mathrm{C}(3\mathrm{M}+\mathrm{N})a^2+\mathrm{D}(4\mathrm{M}+\mathrm{N})a^3=-\mathrm{P}_i$$

$$\mathrm{A}(\mathrm{M}+\mathrm{N})+\mathrm{B}(2\mathrm{M}+\mathrm{N})b+\mathrm{C}(3\mathrm{M}+\mathrm{N})b^2+\mathrm{D}(4\mathrm{M}+\mathrm{N})b^3=-\mathrm{Q}_i$$

Ottenute così A B C D, costruiremo R con la [15], e $\gamma(r)$ con la [17]; sviluppando $\gamma(r)$ in serie di ψ_n troveremo H dalla [21]; e quindi v_i.

Attribuendo ad R ed H l'indice i e ricordando le [23], otterremo:

$$\mathrm{H}_i=\sum_n \varphi_{ni}\psi_n$$

[24] $$v=\sum \mathrm{R}_i\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)+\sum\psi_n(\sum\varphi_{n}) \ ,$$

dove φ_{ni}, analoga espressione della [22], non è altro che:

[25] $$\varphi_{ni}=c_{ni}\cos(p_n t+\eta_n)+\frac{\mathrm{A}_{ni}}{\rho(\nu_i^2-p_n^2)}\cos(\nu_i t+\varepsilon_i)$$

La [24], tenuto conto della [25], esprime *lo spostamento elastico*, in prima approssimazione, *quando*, a differenza del paragrafo 3, *sulle pareti del tubo si esercitano delle pressioni variabili.* Troviamo dunque in tal caso, che alle frequenze delle vibrazioni libere, p_n, si aggiungono le frequenze ν_i delle pressioni sopra una parete, e la *risonanza* avviene quando una delle ν_i si accosta ad una delle p_n.

5. – Osserviamo anzitutto che tanto $F(u)$ che $f(u)$, come già si è detto nel paragrafo 1, sono di secondo grado in u e sue derivate rispetto ad r. Quindi $F(v)$ ed $f(v)$, a norma delle [24] e [25], conterranno termini in cui figurano i prodotti di secondo grado delle espressioni seguenti:

$$\cos(p_n t + \eta_n) \quad , \quad \cos(\nu_i t + \varepsilon_i) \; ;$$

cosicchè $F(v)$ ed $f(v)$ conterranno termini di primo grado in:

$$\cos(\lambda t + \mu) \; ,$$

dove λ ha uno dei valori:

$$0 \; , \quad p_n \pm p_m \; , \quad \nu_i \pm \nu_j \; , \quad p_r \pm \nu_s \; .$$

Potremo cioè scrivere:

$$F(v) = \Phi_0(r) + \sum \Phi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

$$f(v) = \chi_0(r) + \sum \chi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i) \; ;$$

e allora, posto:

$$w = w_0 + \sum w_i \; ,$$

soddisferemo il problema [2] mediante:

$$-\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + L(w_i) = \Phi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i)$$

$$l(w_i) = \chi_i(r) \cos(\lambda_i t + \mu_i) \quad \text{per} \quad r = a, b \; .$$

Il calcolo di ogni w_i richiede quindi il procedimento adottato per la ricerca di G nel § 3. Quanto a w_0 si hanno le seguenti condizioni:

$$-\rho\frac{\partial^2 w_0}{\partial t^2}+\mathrm{L}(w_0)=\Phi_0(r)$$

$$l(w_0)=\chi_0(r) \quad \text{per} \quad r=a,b\ .$$

Posto:

$$w_0=\overline{\mathrm{R}}_0+\overline{\mathrm{H}}_0$$

dove $\overline{\mathrm{R}}_0$ è dato dalla [15] ed $\overline{\mathrm{H}}_0$ dalla [21], il metodo del § 3 si applica senz'altro ($\lambda=\mu=0$).

Indicando con $\overline{\mathrm{R}}_i$ la funzione R della [15] ottenuta nel calcolo diretto alla determinazione di w_i, avremo:

$$w=\sum_{i=0}\overline{\mathrm{R}}_i\cos(\lambda_i t+\mu_i)+\sum_{i=0}\psi_n\sum_n\overline{\varphi}_{ni}$$

dove:

$$\overline{\varphi}_{ni}=\overline{c}_{ni}\cos(p_n t+\overline{\tau}_n)+\frac{\overline{\mathrm{A}}_{ni}}{\lambda_i^2-p_n^2}\cos(\lambda_i t+\mu_i)\ . \qquad (i=0,1,2,3,\ldots)$$

La presenza degli elementi di secondo ordine porta dunque risonanza quando una delle frequenze libere coincide con:

$$p_n\pm p_m\ ,\quad \nu_i\pm\nu_j\ ,\quad p_n\pm\nu_s\ ,$$

cioè con una delle somme o differenze, sia di due frequenze libere, sia di due frequenze relative a pressione di parete, sia di una di pressione con una libera.

6. – L'equazione delle frequenze [2], posto:

$$rh = y \;,$$

si scrive:

$$\left[\chi(1, y)\right]_{y=ah} = \left[\chi(1, y)\right]_{y=bh}$$

che, posto:

$$\sigma = \frac{b}{a} \;, \quad x = ah \;,$$

diventa:

$$\chi(1, x) = \chi(1, \sigma x) \;.$$

È da segnalare un particolare autovalore, quando a, b sono molto vicini fra loro, cioè quando lo spessore della parete è molto sottile. Infatti, in tal caso si può scrivere:

$$\sigma = 1 + \omega$$

con ω piccolo, e perciò:

[26] $$\chi(1, x) = \chi(1, x) + \omega x \frac{\partial}{\partial x} \chi(1, x) \;.$$

Si tenga ora presente la nota formola cui soddisfano le funzioni di Bessel:

[27] $$J_1 Y_1' - Y_1 J_1' = \frac{2}{\pi x}$$

donde, per derivazione, si ha:

[28] $$J_1 Y_1'' - Y_1 J_1'' = -\frac{2}{\pi x^2}$$

Si osservi inoltre che J_1, Y_1 soddisfano l'equazione in z:

$$\frac{d^2}{dx^2}(\sqrt{x}\cdot z)+\left(1-\frac{3}{4x^2}\right)\sqrt{x}\cdot z=0$$

Se, invece di z, mettiamo ora J_1 ed ora Y_1, e moltiplichiamo per $\sqrt{x}\,Y_1'$ e $\sqrt{x}\,J_1'$ rispettivamente, procedendo dopo a sottrazione, si ottiene:

[29]
$$\begin{aligned}&(\sqrt{x}\,J_1)''(\sqrt{x}\,Y_1)'-(\sqrt{x}\,Y_1)''(\sqrt{x}\,J_1)'=\\&\qquad=-\left(1-\frac{3}{4x^2}\right)\sqrt{x}\left[J_1(\sqrt{x}\,Y_1)'-Y_1(\sqrt{x}\,J_1)'\right]\end{aligned}$$

La [26] che si riduce a:

$$\frac{\partial}{\partial x}\chi(1,x)=0\ ,$$

in virtù di [27], [28], [29], diventa:

[30]
$$2x^2-\frac{3}{2}x^{1/2}+\frac{2N^2}{M^2}-1=0$$

rimanendo esclusi gli altri valori di x, che naturalmente saranno molto grandi.

Per l'acciaio, la [30] si riduce approssimativamente a:

$$4x^2-3x^{1/2}-1{,}25=0\ ,$$

da cui risultano le radici positive:

$$x=0{,}15\ ,\quad x=1{,}04\ ,$$

ovvero:

$$h = \frac{0{,}15}{a} \,, \quad h = \frac{1{,}04}{a} \;;$$

e ricordando la [10] si ottengono circa:

$$\frac{3}{2\pi a} \,, \quad \frac{20}{2\pi a} \ \text{chilocicli}$$

a essendo il raggio del tubo, espresso in centimetri.