ACTA
Vol. III - N. 13

GLI EFFETTI DEL SECONDO ORDINE NELLE VIBRAZIONI ELASTICHE (*)

(NOTA I)

PIETRO TEOFILATO

SVMMARIVM. — Hac Nota primum quaeritur an et quomodo lex Hooke extendi possit, ita ut etiam elementa alterius ordinis perpendantur; deinde efficitur ut haec elementa fiant explicita in aequationibus vibrationum elasticarum.

1. – In una mia Nota che risale al 1933 (1), ebbi a studiare da un punto di vista molto generale e piuttosto qualitativo, gli effetti del secondo ordine nelle vibrazioni, effetti, che in una corda vibrante, si rivelano attraverso il fenomeno dei suoni del TARTINI, e in generale consistono nell'introduzione di nuove frequenze.

Ora, per giungere alla nozione dell'energia che accompagna queste frequenze, occorre passare alla esplicitazione degli elementi del secondo ordine; e questo appunto costituirà l'argomento di cui voglio occuparmi, non appena discussa la varia possibilità di estensione della legge di HOOKE.

2. – Pongasi:

$$[1] \qquad \varepsilon_{ii} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i}\ , \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)\ , \quad (i \neq j)$$

$$[2] \qquad e_{ii} = \varepsilon_{ii} + \frac{1}{2}\sum_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2\ ; \quad e_{ij} = \varepsilon_{ij} + \frac{1}{2}\sum_s \frac{\partial u_s}{\partial x_i}\frac{\partial u_s}{\partial x_j}$$

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, l'8 ottobre 1939.
(1) « Atti Pontificia Accademia delle Scienze », anno 36, 1933.

e inoltre:

$$Q(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = 2(e_{11}\alpha_1^2 + e_{22}\alpha_2^2 + e_{33}\alpha_3^2 + 2e_{12}\alpha_1\alpha_2 + 2e_{13}\alpha_1\alpha_3 + 2e_{23}\alpha_2\alpha_3)$$

$$\overline{Q}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = (1+2e_{11})\alpha_1^2 + (1+2e_{22})\alpha_2^2 + (1+2e_{33})\alpha_3^2 + \\ + 4e_{12}\alpha_1\alpha_2 + 4e_{13}\alpha_1\alpha_3 + 4e_{23}\alpha_2\alpha_3 \ .$$

Allora, se per effetto di una deformazione, i punti di coordinate $x_1 x_2 x_3$ passano in $x_1 + u_1$, $x_2 + u_2$, $x_3 + u_3$, si trova subito (1) che l'elemento lineare ds, avente i coseni direttori $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$, si muta in un elemento lineare ds_1, la cui lunghezza è legata a ds da ciascuna delle due seguenti relazioni:

$$[3] \qquad \frac{ds_1^2 - ds^2}{ds^2} = \frac{\Delta(ds^2)}{ds^2} = Q(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$$

$$[4] \qquad \left(\frac{ds_1}{ds}\right)^2 = \left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right)^2 = \overline{Q}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$$

Ne consegue che i raggi vettori centrali delle due quadriche:

$$Q(x_1 x_2 x_3) = 1 \quad , \quad \overline{Q}(x_1 x_2 x_3) = 1$$

danno una rappresentazione geometrica, gli uni e gli altri, rispettivamente di:

$$\left(\frac{1}{ds}\sqrt{\Delta(ds^2)}\right)^{-1} , \quad \left(1 + \frac{\Delta ds}{ds}\right)^{-1} .$$

Si trova subito che gli allungamenti unitari secondo gli assi sono:

$$[5] \qquad \omega_{ii} = \sqrt{1 + 2e_{ii}} - 1 \ ,$$

(1) Love, *A treatise on the mathematical theory of elasticity*, 1934, pag. 60.

donde si ricava:

$$[6] \qquad e_{ii} = \omega_{ii} + \frac{1}{2}\omega_{ii}^2 \;;$$

mentre le semivariazioni angolari ω_{ij} degli angoli formati dagli elementi lineari paralleli agli assi, sono date da:

$$[6] \qquad e_{ij} = \sqrt{1+2e_{ii}}\,\sqrt{1+2e_{jj}}\,\operatorname{sen}\omega_{ij} \;,$$

donde si deduce:

$$[7] \qquad e_{ij} = \omega_{ij}(1+\omega_{ii}+\omega_{jj})$$

3. – Come si è detto in principio, supponiamo trattarsi di deformazioni tali che non possano più trascurarsi gli elementi del secondo ordine, esplicitati fin dal paragrafo precedente.

Immagineremo però, ciò malgrado, di trovarci in quel campo di variabilità della deformazione, anteriore allo snervamento, per cui sussista ancora la linearità tra sforzi ed elementi di deformazione, conformemente a quanto dimostrano le esperienze su provini.

La legge di Hooke per piccoli spostamenti, tali cioè che ci si può limitare alla considerazione delle quantità del primo ordine è espressa da:

$$[8] \qquad p_{ij} = \sum c_{ijhk}\,\varepsilon_{hk}$$

dove le ε_{hk} sono date dalle [1] ed i coefficienti c_{ijhk} sono indipendenti dalle ε_{hk} e formano, attesa l'esistenza del potenziale elastico, una matrice simmetrica. Quando, sotto l'ipotesi della citata linearità, si passa, a causa di spostamenti più cospicui, a considerare gli elementi del secondo ordine, l'estensione della [8], che sembra più ovvia, consiste nel sostituire alle ε, i termini aventi il medesimo loro significato, cioè le ω delle [6] e [7], scrivendo:

$$p_{ij} = \sum c_{ijhk}\,\omega_{hk}$$

Orbene è facile vedere che una siffatta linearità, la quale esprime una proprietà meccanica, non è affatto indipendente dalla scelta delle coordinate, come invece sarebbe da aspettarsi.

4. – Per provare questo asserto, ci riferiremo ad un corpo isotropo. Posto:

$$\mathrm{P}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3) = \sum p_{ij} \alpha_i \alpha_j$$

dove $\|p_{ij}\|$ è la matrice del tensore degli sforzi, sappiamo che $\mathrm{P}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ esprime la componente normale dello sforzo agente sull'elemento superficiale perpendicolare alla direzione definita dai coseni $\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3$.

Segue di qui l'interpretazione meccanica del raggio vettore centrale della quadrica:

$$\mathrm{P}(x_1 x_2 x_3) = 1$$

i cui assi corrispondono alle tre direzioni, che simboleggeremo con $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, lungo le quali agiscono gli sforzi (normali) massimi o minimi. L'equazione della quadrica riferita agli assi $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$, si riduce a:

$$p_{11}{}^0 \bar{x}_1{}^2 + p_{22}{}^0 \bar{x}_2{}^2 + p_{33}{}^0 \bar{x}_3{}^2 = 1 \ ,$$

dove i coefficienti $p_{11}{}^0\ p_{22}{}^0\ p_{33}{}^0$, inverse dei quadrati dei semiassi della quadrica, misurano appunto le pressioni normali massime o minine agenti sulle facce parallele ai piani assiali $\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3$.

Allo stesso modo, in virtù del significato cinematico di $\mathrm{Q}(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3)$ e della conseguente interpretazione cinematica dei raggi centrali della quadrica $\mathrm{Q}(x_1 x_2 x_3) = 1$, le direzioni $x_1{}^0\ x_2{}^0\ x_3{}^0$ degli assi di simmetria di questa, corrispondono alle direzioni del massimo o minimo assunto da ciascuno dei due membri dell'eguaglianza:

$$[9] \qquad \frac{\Delta (ds)^2}{ds^2} = \frac{\Delta\, ds}{ds}\left(2 + \frac{\Delta\, ds}{ds}\right)$$

Analogamente gli assi di simmetria della quadrica $\overline{Q}(x_1\, x_2\, x_3) = 1$ corrispondono alle direzioni del massimo o minimo assunto da $\dfrac{\Delta\, ds}{ds}$, e poichè in un intervallo a destra di $x = 0$, il massimo o minimo esterno di $x(2 + x)$ corrisponde al massimo o minimo esterno di x, segue che gli assi della quadrica $Q = 1$ coincidono in direzione (non in grandezza) con quelli della quadrica $\overline{Q} = 1$. Riferita la quadrica $Q = 1$ agli assi $x_1^0\, x_2^0\, x_3^0$, la sua equazione diverrà:

$$e_{11}^0\, x_1^{0^2} + e_{22}^0\, x_2^{0^2} + e_{33}^0\, x_3^{0^2} = 1$$

dove $e_{11}^0\, e_{22}^0\, e_{33}^0$, inverse dei semiassi della quadrica in parola, sono i massimi o minimi delle grandezze rappresentate in ciascuno dei due membri della [9], e sono appunto i valori assunti lungo le direzioni $x_1^0\, x_2^0\, x_3^0$.

È da osservare che l'espressione:

$$\Omega(\alpha_1\, \alpha_2\, \alpha_3) = \sum \omega_{ij}\, \alpha_j\, \alpha_i\ ,$$

a differenza delle analoghe Q, $\overline{Q}$, P, non ha un significato indipendente dalla scelta degli assi coordinati; non possiamo perciò ripetere per la quadrica:

$$\Omega(x_1\, x_2\, x_3) = 1$$

quanto invece si è detto per le altre quadriche.

L'ipotesi di isotropia porta la coincidenza degli assi $\bar{x}_1\, \bar{x}_2\, \bar{x}_3$ con $x_1^0\, x_2^0\, x_3^0$, ed allora, limitandoci per semplicità alle due dimensioni, possiamo, a norma del significato attribuito alle ω, parlare [1] degli allungamenti unitari $\omega_{11}^0\, \omega_{22}^0$ secondo gli assi $x_1^0\, x_2^0$ di simmetria comuni alle tre coniche:

$$Q(x_1\, x_2) = 1 \quad , \quad \overline{Q}(x_1\, x_2) = 1 \quad , \quad P(x_1\, x_2) = 1 \quad ;$$

---

[1] Cfr. pag. 86, formola [5].

non possiamo peraltro asserire che $\omega_{11}^0\,\omega_{22}^0$ corrispondono alle inverse dei quadrati dei semiassi della conica $\Omega = 1$, nè che questa abbia $x_1^0\,x_2^0$ come assi di simmetria.

D'altra parte, il già espresso significato di $\omega_{11}^0\,\omega_{22}^0$ ci permette di stabilire che:

$$\omega_{ii}^0 = \sqrt{1+2e_{ii}^0} - 1 = \sim e_{ii}^0 - \frac{1}{2}{e_{ii}^0}^2 \quad ,$$

per modo che l'ipotetica linearità fra le p e le ω, si esprime, sia con le equazioni:

$$p_{11}^0 = \mathrm{M}\omega_{11}^0 + \mathrm{N}\omega_{22}^0$$

$$p_{22}^0 = \mathrm{M}\omega_{22}^0 + \mathrm{N}\omega_{11}^0 \quad ,$$

sia con:

$$p_{ii}^0 = (\mathrm{M}-\mathrm{N})\left(e_{ii}^0 - \frac{1}{2}{e_{ii}^0}^2\right) + \mathrm{N}\left(\sum_s e_{ss}^0 - \frac{1}{2}\sum_s {e_{ss}^0}^2\right) \, .$$

Rappresenti:

[10]

	x_1	x_2
x_1^0	α_{11}	α_{12}
x_2^0	α_{21}	α_{22}

il quadro dei coseni tra gli assi qualsiasi $x_1\,x_2$ e gli altri già definiti $x_1^0\,x_2^0$.

Sussistono le relazioni:

$$\alpha_{ih} = \frac{\partial x_i^0}{\partial x_h} \quad , \quad 0 = \frac{\partial^2 x_i^0}{\partial x_h \partial x_h}$$

e quindi:

$$[11] \qquad p_{ij} = \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_s \frac{\partial^2 \mathrm{P}}{\partial {x_s^0}^2}\alpha_{si}\,\alpha_{sj} = \sum_s p_{ss}^0\,\alpha_{si}\,\alpha_{sj}$$

e così pure:

[12] $$e_{ij} = \sum_s e_{ss}^0 \alpha_{si} \alpha_{sj}$$

Se ne deduce:

[13] $$\begin{aligned} p_{ii} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(e_{ii} - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{si}^2 \right) + \mathrm{N} \left(\sum e_{ss}^0 - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2} \right) \\ p_{12} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(e_{12} - \frac{1}{2} \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2} \right) \end{aligned}$$

D'altra parte, poichè $e_{11}^0 e_{22}^0$ sono radici dell'equazione:

[14] $$\begin{vmatrix} e_{11} - e_{ss}^0 & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} - e_{ss}^0 \end{vmatrix} = 0$$

ed hanno un preciso significato geometrico, invariante per trasformazione di assi, si ricava che le due espressioni:

[15] $$e = e_{11} + e_{22} \quad , \quad g = e_{11} e_{22} - e_{12}^2$$

sono anch'esse invarianti e si ricava inoltre che i coseni del quadro [10] sono proporzionali ai minori di una delle due linee della matrice [14].

Posto cioè:

$$\mathrm{A}_1 = e_{12}^2 + (e_{11} - e_{11}^0)^2 \quad , \quad \mathrm{B}_1 = e_{12}^2 + (e_{11} - e_{22}^0)^2 \quad ,$$

e, con scambio di indici:

$$\mathrm{A}_2 = e_{21}^2 + (e_{22} - e_{22}^0)^2 \quad , \quad \mathrm{B}_2 = e_{21}^2 + (e_{22} - e_{11}^0)^2 \quad ,$$

si ottiene:

[16] $$\begin{aligned} \alpha_{11} &= (e_{22} - e_{11}^0) \mathrm{B}_2^{-1/2} \quad , \quad \alpha_{12} = - e_{21} \mathrm{B}_2^{-1/2} \\ \alpha_{21} &= (e_{22} - e_{22}^0) \mathrm{A}_2^{-1/2} \quad , \quad \alpha_{22} = - e_{21} \mathrm{A}_2^{-1/2} \end{aligned}$$

oppure:

[17]
$$\alpha_{11} = - e_{12} A_1^{-1/2} \quad , \qquad \alpha_{12} = (e_{11} - e_{11}^0) A_1^{-1/2}$$
$$\alpha_{21} = - e_{12} B_1^{-1/2} \quad , \qquad \alpha_{22} = (e_{11} - e_{22}^0) B_1^{-1/2}$$

Si ricava subito:

$$A_1 + B_1 = A_2 + B_2 = H \quad ,$$
$$H = 4e_{12}^2 + (e_{11} - e_{22})^2 \ .$$

Così pure si ha:

$$e_{11}^0 A_2 + e_{22}^0 B_2 = e_{22} H \quad ,$$

donde, moltiplicando ambo i membri per $e_{11}^0 + e_{22}^0$, e tenendo presente l'invariantività di e, g, espressa dalle [15] ed il significato di H, si deduce:

[18]
$$e_{11}^{0^2} A_2 + e_{22}^{0^2} B_2 = (e_{12}^2 + e_{22}^2) H$$

Moltiplicando ambo i membri di quest'ultima ancora per $e_{11}^0 + e_{22}^0$, si ottiene:

[19]
$$e_{11}^{0^3} A_2 + e_{22}^{0^3} B_2 = (e_{12}^2 e_{11} + 2 e_{12}^2 e_{22} + e_{22}^3) H$$

Si ricava infine:

$$A_2 B_2 = e_{12}^2 H$$

Dalle [16] e [18] deriva:

[20]
$$\sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s2}^2 = e_{21}^2 \left(\frac{e_{11}^{0^2}}{B_2} + \frac{e_{22}^{0^2}}{A_2} \right) = e_{21}^2 + e_{22}^2 \quad ,$$

mentre dalle [17] e dall'analoga della [18], ottenuta mediante scambio degli indici 1, 2, si ottiene:

[21]
$$\sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1}^2 = e_{12}^2 + e_{11}^2 \ .$$

Finalmente dalle [14]:

$$\sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2} = - e_{21} \frac{e_{11}^{0^2} (e_{22} - e_{11}^0)}{B_2} + \frac{e_{22}^{0^2} (e_{22} - e_{22}^0)}{A_2}$$

ed a causa delle [18] e [19]:

$$[22] \qquad \sum e_{ss}^{0^2} \alpha_{s1} \alpha_{s2} = e_{12}(e_{11} + e_{22}) \; ,$$

per cui, ricordando il significato di e dato nelle [13], si può scrivere, in virtù di [20], [21], [22]:

$$p_{ii} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii} + \mathrm{N} e - \frac{\mathrm{M} - \mathrm{N}}{2} (e_{ii}^2 + e_{12}^2) - \mathrm{N}(2 e_{12}^2 + e_{11}^2 + e_{22}^2)$$

$$p_{12} = (\mathrm{M} - \mathrm{N}) \left(1 - \frac{1}{2} e\right) e_{12}$$

ed in causa di [6] e [7]:

$$p_{ii} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, \omega_{ii} + \mathrm{N}(\omega_{11} + \omega_{22}) - \frac{\mathrm{M} + \mathrm{N}}{2} \omega_{12}^2$$

$$p_{12} = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, \omega_{12} \left[1 + \frac{1}{2} (\omega_{11} + \omega_{22})\right] .$$

Dunque, mentre le p^0 sono lineari nelle ω^0, invece le p non risultano più lineari nelle ω, e non permane quindi la linearità tra sforzi ed elementi di deformazione, quando si opera una trasformazione di assi.

È inoltre da osservare che l'espressione:

$$\sum p_{ij} \delta \omega_{ij}$$

non è un differenziale esatto, onde, sotto l'ipotesi fatta, non esisterebbe più il potenziale elastico.

Se invece assumiamo, come estensione della legge di Hooke, quella che esprime la linearità fra le p e le e, allora si vede subito che questa permane con la trasformazione di assi, e inoltre che $\Sigma p \delta e$ è un differenziale esatto.

Infatti, assunta nel corpo isotropo, la coincidenza fra le direzioni di massimo e minimo sforzo con le direzioni di massimo e minimo allugamento, le quali ultime coincidono poi anche con quelle di massimo e minimo di $\frac{\Delta ds^2}{ds^2}$, cioè di massimo e minimo delle e (vale a dire $e_{11}{}^0 e_{22}{}^0$), avremo:

$$p_{11}{}^0 = \mathrm{M} e_{11}{}^0 + \mathrm{N} e_{22}{}^0$$
$$p_{22}{}^0 = \mathrm{M} e_{22}{}^0 + \mathrm{N} e_{11}{}^0 \quad ,$$

ovvero:

$$p_{ii}{}^0 = (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii}{}^0 + \mathrm{N} e^0 \quad , \qquad (e^0 = e_{11}{}^0 + e_{22}{}^0)$$

ed, in virtù di [11] e [12] e sottintendendo anche le tre dimensioni:

$$[23] \qquad \begin{aligned} p_{ii} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ii} + \mathrm{N} e \\ p_{ij} &= (\mathrm{M} - \mathrm{N})\, e_{ij} \end{aligned}$$

dove però:

$$e = e_{11} + e_{22} + e_{33}$$

non rappresenta più la dilatazione unitaria di volume.

La linearità tra p ed e dunque si conserva.

Poichè le [23], per spostamenti infinitesimi, devono ridursi alle ordinarie formole di elasticità, in quanto che le $e_{ii} e_{ij}$ delle [2] devono ridursi alle $\varepsilon_{ii} \varepsilon_{ij}$ delle [1], segue che:

$$\mathrm{M} - \mathrm{N} = \frac{\mathrm{E}}{1 + \nu} \quad , \quad \mathrm{N} = \frac{\mathrm{E}\nu}{(1 - 2\nu)(1 + \nu)}$$

dove E, ν sono i due moduli di elasticità longitudinale e trasversale (1).

(1) Le ε_{ij}, per $i \neq j$, che noi abbiamo adottate, sono la metà di quelle adoperate da altri autori.

Il lavoro elastico relativo ad un volume unitario, e dovuto da un incremento infinitesimo δe delle e, si esprime con:

$$\sum p_{ij} \delta e_{ij} \ ,$$

perciò il lavoro L occorrente per passare dallo stato definito da: $e_{ij} = 0$, allo stato finale sarà:

$$[24] \qquad \mathrm{L} = \frac{1}{2} \mathrm{M} e^2 + (\mathrm{M} - \mathrm{N})(e_{12}^2 + e_{13}^2 + e_{23}^2 - e_{11} e_{22} - e_{11} e_{33} - e_{22} e_{33})$$

Le [23] e [24] sono espressioni nelle e, perfettamente identiche a quelle che le p ed L hanno nelle ε, quando cioè i termini di secondo ordine sono trascurabili.

5. - Quando si procede ad esprimere la [24] per mezzo delle [1] e [2], si ottiene un polinomio nelle derivàte prime di $u_1 u_2 u_3$, per modo che la variazione δL risulta del tipo:

$$[25] \qquad \delta \mathrm{L} = \sum \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j + \sum \mathrm{B}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j$$

dove le A_{ij} contengono le derivate delle u al primo grado, mentre le B_{ij} le contengono al secondo grado, se omettiamo i termini di grado superiore.

Allorchè ci si vale del principio di Hamilton, e per L si assume solo il primo termine del secondo membro della [25], cioè si assume δL eguale a:

$$[26] \qquad \delta \mathrm{L}_1 = \sum \mathrm{A}_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \delta u_j \ ,$$

allora si ottengono le ordinarie equazioni delle vibrazioni elastiche, ovvero:

$$[27] \qquad - \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial \mathrm{U}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i1}} + \frac{\partial}{\partial x_2} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i2}} + \frac{\partial}{\partial x_3} \frac{\partial \varphi}{\partial \varepsilon_{i3}} = 0$$

dove U è il potenziale delle forze di massa e φ non è altro che l'analoga della funzione L, costruita per mezzo delle ε, anzichè delle e. Al contorno del corpo elastico si ha:

$$[28] \qquad \cos\widehat{nx_1}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{i1}} + \cos\widehat{nx_2}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{i2}} + \cos\widehat{nx_3}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{i3}} = X_{ni}$$

n essendo la normale al contorno ed $X_{n1} X_{n2} X_{n3}$ le componenti dello sforzo applicato su questo.

La [27] si può anche scrivere, come è noto:

$$[29] \qquad -\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{M+N}{2}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum\frac{\partial u_h}{\partial x_h} + \frac{M-N}{2}\Delta u_i = 0$$

e la [28] invece:

$$[30] \qquad \begin{gathered} \left[(M-N)\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + N\sum\frac{\partial u_s}{\partial x_s}\right]\cos\widehat{nx_1} + \\ + (M-N)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)\cos\widehat{nx_2} + (M-N)\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)\cos\widehat{nx_3} = X_{1n} \end{gathered}$$

e due analoghe che si ottengono con permutazione di indici.

Quando poi, invece della [26] si assume la [25], cioè:

$$\delta L = \delta L_1 + \delta L_2 \ ,$$

dove δL_2 rappresenta il secondo termine del secondo membro della [25], allora le [29] e [30] vanno modificate con l'aggiunta dei termini che derivano dalle integrazioni per parti relative agli addendi che costituiscono δL_2. Sussisteranno a conti fatti (omettendo gli sviluppi alquanto prolissi) le equazioni seguenti:

$$[31] \qquad -\rho\frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + \frac{\partial U}{\partial x_i} + \sum\frac{\partial}{\partial x_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{is}} = F_i$$

$$[32] \qquad \sum\cos\widehat{nx_s}\frac{\partial\varphi}{\partial\varepsilon_{is}} - X_{ni} = f_i$$

dove:

$$F_1 = -\frac{M}{2}\frac{\partial}{\partial x_1}\sum_{si}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2 - M\sum_{ik}\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{\partial u_i}{\partial x_i}\frac{\partial u_1}{\partial x_k} -$$

$$-\frac{M-N}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)-\right.\right.$$

$$\left.-\sum_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_2}\right)^2-\sum_s\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_3}\right)^2-2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\sum_s\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_3}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\sum_s\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_3}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right\}$$

da cui, con permutazione degli indici, si ottengono $F_2 F_3$.

A sua volta:

$$f_1 = \cos\widehat{nx_1}\left\{M\sum_{si}\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_i}\right)^2 + M\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_1}\right)-\sum\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_3}\right)^2-\sum\left(\frac{\partial u_s}{\partial x_2}\right)^2-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+\frac{\partial u_3}{\partial x_3}\right)\right]\right\}+\cos\widehat{nx_2}\left\{M\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3}+\frac{\partial u_3}{\partial x_2}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\right)+\sum\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_2}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3}+\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right)\right]\right\}+\cos nx_3\left\{M\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\sum_i\frac{\partial u_i}{\partial x_i}+\right.$$

$$+\frac{M-N}{2}\left[\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1}+\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\right)+\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2}+\frac{\partial u_2}{\partial x_3}\right)+\sum\frac{\partial u_s}{\partial x_1}\frac{\partial u_s}{\partial x_3}-\right.$$

$$\left.\left.-2\frac{\partial u_1}{\partial x_3}\left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\right)\right]\right\}\;;$$

da cui, con permutazione degli indici si ottengono $f_2\, f_3$.

Indicando con L_i l'espressione che si ottiene dal primo membro della [29] quando si prescinda dal termine $-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$, e indicando con l_i il primo membro della [30], le equazioni delle vibrazioni, ove si tenga conto degli elementi del secondo ordine, sono:

[31] $$-\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} + L_i + F_i = 0$$

[31′] $$l_i + f_i = X_{ni}$$

Posto:

$$u_i = \sigma V_i + \sigma^2 W_i$$

dove σ è quantità così piccola che noi possiamo trascurarne le potenze superiori alla seconda, si ricava dal conguaglio dei termini contenenti σ allo stesso grado e mettendo poi v in luogo di σV e w in luogo di $\sigma^2 W$:

$$-\rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} + L_i(v) = 0$$

$$l_i(v) = X_{ni}$$

e poi:

$$-\rho \frac{\partial^2 w_i}{\partial t^2} + L_i(w) = F(v)$$

$$l_i(w) = f(v)$$

dove $F(v)$ $f(v)$ stanno ad indicare che le funzioni F ed f sono costruite con $v_1 v_2 v_3$ anzichè con le $u_1 u_2 u_3$.

Vedremo con un esempio che w ammette oltre alle frequenze proprie di v, anche altre, che si ottengono da quelle, per via di somma o differenza.