ACTA
Vol. III - N. 11

SOPRA ALCUNE RICERCHE RIGUARDANTI IL CALCOLO DEGLI OPERATORI FUNZIONALI (*)

FRANCESCO SBRANA

SVMMARIVM. — Nonnulla animadvertuntur de quibusdam scriptis ab Auctore ante paucos annos editis, circa calculum operatorium Heaviside-Giorgi, et circa huius calculi generalem extensionem.

Quale contributo alle relazioni sul calcolo operatorio funzionale, che formano in questo tempo oggetto di discussione, ritengo utile dedicare qualche osservazione intorno ad alcuni lavori che ho pubblicato qualche anno fa sul calcolo operatorio di HEAVISIDE-GIORGI, e ad una sua generalizzazione.

1. – Procedendo in ordine cronologico, mi occuperò dapprima di una mia Memoria, di carattere analitico, del 1931 (1). Di questa Memoria è stata data dal FANTAPPIÈ (2) una recensione sostanzialmente sfavorevole, in cui è detto che ho risolto in modo puramente formale alcune equazioni integrali di VOLTERRA, senza dare la verifica delle soluzioni, nè alcuna precisazione dei campi funzionali in cui le espressioni simboliche hanno significato. Ora io non trovo giustificati questi

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Giorgi, il 31 luglio 1939.

(1) F. SBRANA, *Sulla applicazione del calcolo degli operatori funzionali alla risoluzione di equazioni integrali del Volterra*, «Mem. della R. Accad. dei Lincei», serie VI, vol. V, fasc. 1, 1931, pag. 1-23.

(2) «Zentralblatt für Mathematik», Bd. 5, pag. 164.

appunti, per le ragioni che seguono. Anzitutto mi sono valso costantemente del procedimento del GIORGI, assicurandomi della validità dei simboli adoperati e delle formule ottenute, nei casi in cui sono pervenuto alla effettiva risoluzione delle equazioni esaminate. Quanto alle verifiche, il detto procedimento non le richiede, quando sia correttamente applicato, come mi lusingo di aver fatto io. D'altra parte, per quelle equazioni che erano già state risolute per altra via da TEDONE e VOLTERRA, e di cui ritrovo la soluzione col metodo degli operatori funzionali, la verifica era doppiamente superflua, per il fatto che ottengo gli stessi risultati stabiliti anteriormente da quegli Autori.

Nella Memoria citata mi ero prefisso anche un altro scopo, di cui il FANTAPPIÈ non tiene alcun conto. Negli ultimi anni della sua notevole attività scientifica il prof. TEDONE si era preoccupato di ricercare le condizioni necessarie e sufficienti affinchè un'equazione integrale di VOLTERRA col nucleo funzione della differenza delle due variabili sia risolubile *con procedimento finito*, e cioè con un numero finito di integrazioni e derivazioni. Egli indicò diverse classi di equazioni risolubili in questo senso, e tra di esse una gli si presentò con caratteri eccezionali, e fu ribelle ad ogni suo tentativo. Nel § 3 (pag. 7 ss.) della mia Memoria io risolvo la detta equazione, col metodo del GIORGI, e nella forma desiderata dal prof. TEDONE. Una nuova dimostrazione di questo risultato mi riserbo di pubblicare prossimamente, essendone già da tempo in possesso.

2. – Una seconda Memoria (1) mi fu ispirata dalla lettura di una Nota del prof. SERINI (2). Il problema trattato si può ricondurre allo studio delle vibrazioni di una corda elastica di lunghezza finita in un mezzo resistente, con date condizioni iniziali, e agli estremi. Di questo problema ritengo essere stato il primo a dare la soluzione per mezzo

(1) F. SBRANA, *Sui problemi di propagazione in una dimensione*, « Mem. della R. Accad. dei Lincei », serie 6a, vol. V, fasc. 6, 1933, pag. 221-251.

(2) R. SERINI, « Rend. della R. Accad. dei Lincei », serie 6a, vol. XIII, fasc. 5, 1° sem., 1931, pag. 354-358.

di integrali definiti [1]. Il SERINI riprese la questione in un caso particolare, ed io tornai sull'argomento con la Memoria ultimamente citata, risolvendo più in generale il problema delle vibrazioni di una corda semifinita, o finita. Del problema trattato dal SERINI davo poi una soluzione apparentemente diversa, che desidero ora identificare con quella stessa del SERINI.

Si tratta in sostanza di determinare, per t qualunque, ed x compreso tra zero ed l, la funzione $u(x,t)$ definita dalla relazione:

$$[1] \qquad u(x,t) = e^{-bt} \frac{e^{-\frac{x}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}} - e^{-\frac{2l-x}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}}}{1 - e^{-\frac{2l}{a}\sqrt{\Delta^2-b^2}}} e^{bt} f(t) ,$$

in cui $\Delta = \frac{\partial}{\partial t}$, a e b sono due costanti positive, $f(t)$ una funzione per cui si suppongono lecite le operazioni indicate, che si riduce a zero per $t < 0$; del secondo membro si deve scegliere la *valutazione fondamentale* (o retrospettiva). Posto per brevità q in luogo di $\sqrt{\Delta^2 - b^2}$, dalla [1] si ha:

$$[2] \qquad u(x,t) = e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q} - e^{-\frac{2l-x}{a}q} + e^{-\frac{2l+x}{a}q} - e^{-\frac{4l-x}{a}q} + \ldots\right) e^{bt} f(t) .$$

Per ottenere la valutazione richiesta occorre servirsi della seguente, stabilita dal GIORGI, nell'ipotesi che $\mathrm{F}(t)$ si annulli per $t < 0$:

$$[3] \qquad \begin{cases} e^{-\frac{x}{a}q}\,\mathrm{F}(t) = 0 \ , \quad \text{per} \quad t < \dfrac{x}{a} \ ; \\ e^{-\frac{x}{a}q}\,\mathrm{F}(t) = \mathrm{F}\left(t - \dfrac{x}{a}\right) + \dfrac{bx}{a} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} \frac{\mathrm{I}_1\left(b\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{x^2}{a^2}}\right)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - \frac{x^2}{a^2}}} \mathrm{F}(\tau)\,d\tau \ , \quad \text{per} \quad t > \dfrac{x}{a} . \end{cases}$$

---

[1] Cfr. F. SBRANA, *Sulle vibrazioni di una corda elastica in un mezzo resistente*, « Rend. della R. Accad. dei Lincei », serie 5ª, vol. XXIV, 1° sem., 1915, pag. 207-212 e 409-411.

Dalla [3] segue intanto che:

$$[4] \qquad u(x,t) = 0 \ , \quad \text{per} \quad t < \frac{x}{a} \, .$$

Infatti per $t < \frac{x}{a}$, essendo $x < l$ è pure t minore di $\frac{2l - x}{a}$, $\frac{2l + x}{a}$, ecc.; perciò il secondo membro della [2] si annulla identicamente. In modo analogo si trova poi:

$$[4^a] \quad u(x,t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}q} e^{bt} f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{x}{a} < t < \frac{2l - x}{a} \, ,$$

$$[4^b] \quad u(x,t) = e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q} - e^{-\frac{2l-x}{a}q}\right) e^{bt} f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{2l - x}{a} < t < \frac{2l + x}{a} \, ,$$

$$[4^c] \quad u(x,t) = e^{-bt}\left(e^{-\frac{x}{a}q} - e^{-\frac{2l-x}{a}q} + e^{-\frac{2l+x}{a}q}\right) e^{bt} f(t), \ \text{per} \ \frac{2l + x}{a} < t < \frac{4l - x}{a} \, ,$$

e così via. Le [4], [4^a], [4^b], [4^c], ecc. costituiscono sostanzialmente il risultato ottenuto nella mia Memoria nel caso in esame, salvo qualche differenza puramente formale (cfr. pag. 249). Si può notare che le [3] portano come conseguenza:

$$[5^a] \qquad u(x,t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}q} e^{bt} f(t) \ , \quad \text{per} \quad t < \frac{l}{a} \ ;$$

similmente le [4^a], [4^b] forniscono:

$$[5^b] \qquad u(x,t) = e^{-bt} e^{-\frac{x}{a}q} e^{bt} f(t) \ , \quad \text{per} \quad \frac{l}{a} < t < \frac{2l}{a} \, ,$$

e così via. Le [5^a], [5^b], ..., rappresentano la soluzione ottenuta dal SERINI.

3. – In una terza Memoria [1], propongo l'impiego di operatori funzionali in più variabili per l'integrazione delle equazioni differenziali lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti. Questo procedimento si può considerare una estensione del metodo di GIORGI, come mi permetto di mostrare brevemente.

Abbiasi per esempio da integrare l'equazione:

$$\text{[6]}\qquad \mathrm{E}(u) \equiv a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} = f(x,y) \ ,$$

in cui $a, b, c, \ldots$ sono costanti reali, ed $f(x,y)$ una funzione assegnata, che supponiamo esprimibile nel modo che segue:

$$f(x,y) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \iint_{-\infty}^{+\infty} f(\xi,\eta)\, 1(x-\xi)\, 1(y-\eta)\, d\xi\, d\eta \ ,$$

dove $1(x)$ è la solita funzione, uguale a zero per $t < 0$, ad uno per $t < 0$. È noto che si può porre:

$$1(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(s)} \frac{e^{\omega x}}{\omega}\, d\omega \ , \quad (i^2 = -1) \ ,$$

dove s è una linea del piano della variabile complessa ω che va da $-i\infty$ a $+i\infty$, lasciando a sinistra l'origine. Posto similmente:

$$1(y) = \frac{1}{2\pi i} \int_{(l)} \frac{e^{\zeta y}}{\zeta}\, d\zeta \ ,$$

---

[1] F. SBRANA, *Sulla integrazione delle equazioni lineari alle derivate parziali a coefficienti costanti*, « Atti della Società Ligustica di Scienze e Lettere di Genova », vol. XIII, pag. 1-35, 1934.

dalla [6] segue:

$$u(x, y) = \iint_{-\infty}^{+\infty} G(x - \xi, y - \eta) f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta ,$$

con

$$G(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \frac{1}{E} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \int_{(s)} \frac{e^{\omega x}}{\omega} d\omega \int_{(l)} \frac{e^{\zeta y}}{\zeta} d\zeta .$$

Risulta subito che si può porre:

$$[7] \qquad G(x, y) = -\frac{1}{4\pi^2} \int_{(s)} d\omega \int_{(l)} \frac{e^{\omega x + \zeta y} \, d\zeta}{a\omega^2 + b\zeta^2 + c\zeta\omega + d\omega + e\zeta} .$$

Si potranno avere diverse determinazioni per G, a seconda della maniera in cui sono disposte le linee s ed l rispetto alle singolarità della funzione integranda. Nasce così una discussione, analoga a quella che si deve fare per gli operatori in una variabile, con la differenza che questi conducono allo studio del comportamento di funzioni di una variabile complessa, mentre gli operatori in due variabili danno luogo allo studio di funzioni di due variabili complesse.

Abbiamo qui accennato ad un'equazione *completa*, come la [6]; ma nella Memoria citata abbiamo mostrato anche come si pervenga alla integrazione di un'equazione omogenea. Il procedimento seguito ha permesso di ottenere qualche nuovo risultato concernente il problema delle vibrazioni di una sbarra elastica omogenea, con date condizioni iniziali, e agli estremi (1).

(1) Di questa Memoria è data una lunga e benevola recensione dal Bateman (« Zentralblatt für Math. », Bd. 10, 1935, pag. 167); nello stesso volume (pag. 400) si trova una recensione di V. Bernstein sulla Memoria ricordata nel § 2.