ACTA
Vol. III - N. 6

LA DENSITÀ DI ENERGIA IN ALCUNI PROBLEMI DI ACUSTICA (*)

GINO SACERDOTE

SVMMARIVM. — Densitas energiae sumitur tamquam parameter propagationis undae acusticae. Si undae sunt planae habetur propagatio undulatoria huius densitatis.

Praeterea A. loquitur de quibusdam applicationibus quibus quaedam supputationes, quae ad acusticam architectonicam inservire possunt, simpliciores fiunt.

1. — In molti problemi di acustica ambientale, particolarmente in quelli della distribuzione dell'energia sonora e dell'andamento della coda sonora in un determinato ambiente, si considera come parametro fondamentale la densità di energia.

Infatti l'espressione analitica di tali fenomeni in funzione della densità di energia assnme una forma molto più semplice che in funzione della pressione sonora.

Ci si può ora chiedere in quali casi, partendo dalle equazioni generali di propagazione sonora, si possa effettivamente parlare della densità di energia come di un parametro da considerare a sè.

La densità di energia E è definita da

$$E = \frac{1}{2}\left(\rho U^2 + \frac{P^2}{\rho c^2}\right)$$

ed è la somma delle energie cinetica e potenziale per unità di volume (ρ densità del mezzo, c velocità di propagazione del suono, U velocità di spostamento, P pressione sonora).

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Luigi Lombardi, il 18 dicembre 1938.

La densità di energia è una quantità scalare e viene espressa in joule/m.[3], quantità omogenea con una pressione espressa in decabar. Questa pressione è quantità direttamente accessibile alla misura in quanto essa è proporzionale alla pressione di radiazione.

Oltre alla densità di energia bisogna considerare una seconda quantità di carattere energetico; l'intensità espressa dal prodotto $p \cdot u$ watt/m.[2]. L'intensità è una quantità vettoriale.

In tutte le considerazioni che seguono si ammettono suoni di piccole intensità, e quindi si suppongono valide le equazioni lineari di propagazione sonora.

2. — Le equazioni generali di propagazione sono:

$$\rho \frac{\partial u}{\partial t} = -\operatorname{grad} p$$

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 \operatorname{div} u$$

Moltiplico per u e per p queste relazioni:

$$\rho\, u \frac{\partial u}{\partial t} = -u \operatorname{grad} p \qquad p \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} p \operatorname{grad} p$$

$$\frac{1}{\rho c^2} p \frac{\partial p}{\partial t} = -p \operatorname{div} u \qquad u \frac{\partial p}{\partial t} = -\rho c^2 u \operatorname{div} u$$

Sommando si ha:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{2}\left(\rho u^2 + \frac{p^2}{\rho c^2}\right) = -\operatorname{div} u p \quad \text{ossia} \quad \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathrm{I}$$

$$\frac{\partial p u}{\partial t} = -c^2 \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{2} \frac{p^2}{\rho c^2} + \rho u \operatorname{div} u \right.$$

$$= -c^2 \left\{ \operatorname{grad} \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{\rho c^2} + \rho u^2\right) + \left[\rho u \operatorname{div} u - \rho \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2\right] \right\}$$

$$= -c^2 \operatorname{grad} \mathrm{E} - c^2 \rho \left\{ u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2 \right\}$$

Si perviene quindi al sistema:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = -\operatorname{div} I$$

$$\frac{\partial I}{\partial t} = -c^2 \operatorname{grad} E - \rho c^2\left(u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^{-2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} I = -\operatorname{div} \frac{\partial I}{\partial t} = +c^2\Delta^2 E + \rho c^2 \operatorname{div}\left[u \operatorname{div} u - \frac{1}{2} \operatorname{grag} u^2\right].$$

Si ha una propagazione ondulatoria della E quando:

$$u \operatorname{div} u = \frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2 .$$

In coordinate cartesiane, posto:

$$u = iX + jY + kZ ,$$

si ha:

$$X\left(\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x}(X^2 + Y^2 + Z^2)$$

e analoghe

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial x} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = Y\frac{\partial Y}{\partial x} + Z\frac{\partial Z}{\partial z} \quad ;$$

Se il moto è irrotazionale: $\frac{\partial Y}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial y} \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial z}$

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}\right) = Y\frac{\partial X}{\partial y} + Z\frac{\partial X}{\partial z}$$

$$X\frac{\partial Y}{\partial y} - Y\frac{\partial X}{\partial y} = Z\frac{\partial X}{\partial z} - X\frac{\partial Z}{\partial z}$$

$$X^2\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Z}{X}\right) + X^2\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X}\right) = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{Z}{X}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Y}{X}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{X}{X}\right) = 0$$

$$\operatorname{div}\frac{jX + jY + kZ}{X} = 0 \qquad \operatorname{div}\left(\frac{U}{X}\right) = 0$$

e analogamente

$$\operatorname{div}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Y}}=0 \qquad \operatorname{div}\frac{\mathrm{U}}{\mathrm{Z}}=0\ .$$

Queste tre equazioni ci danno la condizione di propagazione ondulatoria della densità di energia.

3. — Un caso particolarmente semplice ed interessante si ha quando la velocità è sempre parallela ad una medesima direzione. Allora la quantità $u \operatorname{div} \cdot u$ è uguale a $\frac{1}{2} \operatorname{grad} u^2$, quindi le relazioni fondamentali si riducono a:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathrm{I} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{E}}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 \mathrm{E}$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} = -c^2 \operatorname{grad} \mathrm{E} \qquad \frac{\partial^2 \mathrm{I}}{\partial t^2} = c^2 \Delta^2 \mathrm{I}$$

Questo caso, particolarmente semplice, si può applicare senz'altro ai problemi di propagazione sonora per onde piane, che ne costituiscono un caso particolare.

Trattandosi di quantità variabili con la sola x, le equazioni di propagazione della densità di energia e della intensità si riducono a:

$$\frac{\partial \mathrm{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial x}$$

$$\frac{\partial \mathrm{I}}{\partial t} = -c^2 \frac{\partial \mathrm{E}}{\partial x}$$

Si può quindi asserire che in linea di massima, nel caso di una propagazione per onde piane la densità di energia e la intensità si comportano come la pressione e la velocità sonora: cambiano naturalmente le condizioni ai limiti, di modo che differiscono poi i risultati definitivi nello studio di un determinato problema.

Sempre con riferimento al caso particolarmente semplice della propagazione per onde piane, si può notare il vantaggio che si ha adottando come parametro delle equazioni di propagazione la densità di energia, nello studio di fenomeni transitori: infatti, dal calcolo separato della p e della v, per avere la E bisogna eseguire il quadrato di due serie, operazione che difficilmente ci può ricondurre a risultati semplici, mentre partendo dalle equazioni proposte, e ricorrendo all'analogia di noti problemi di propagazione, si perviene direttamente al risultato ricercato.

4. — Un primo problema particolarmente interessante è lo studio dell'andamento della coda sonora in un tubo senza perdite, chiuso da una resistenza acustica R.

In questo caso si ha subito una relazione fra la E e la I, all'estremità del tubo:

$$\mathrm{I} = \alpha c \mathrm{E}$$

ove α è il coefficiente di assorbimento del materiale di chiusura:

$$\alpha = \frac{2\mathrm{R}\rho c}{\mathrm{R}^2 + (\rho c)^2}$$

Una seconda relazione si può avere dal fatto che all'origine del tubo la velocità è nota. Nel caso del fenomeno in esame tale velocità è sinoidale per tempi anteriori al tempo zero, è nulla per tempi posteriori.

Senza svolgere per ora tutto il calcolo, ed esaminarne i risultati, possiamo notare senz'altro che la densità di energia decresce col tempo secondo una legge esponenziale

$$l^{-\left[\log\sqrt{\frac{1+\alpha}{1-\alpha}}\right]\frac{ct}{l}} \quad (l \text{ lunghezza del tubo})$$

È bene notare che la densità di energia, che si considera normalmente, è la media su una lunghezza d'onda della quantità che noi abbiamo adottato: quindi per riportarci a risultati noti si deve eseguire tale media con una opportuna integrazione.

Accenniamo ancora che si possono agevolmente trattare altri problemi quali l'isolamento in regime transitorio, la riverberazione in ambienti accoppiati e via dicendo.