ACTA
Vol. III - N. 2

SU ALCUNI SVILUPPI IN SERIE PROCEDENTI PER FUNZIONI NON NECESSARIAMENTE ORTOGONALI (*)

CARLO MIRANDA

(Istituto per le Applicazioni del Calcolo
del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Roma)

SVMMARIVM. — Auctor disputat an et quomodo possint obtineri evolutiones in series procedentes per autosolutiones aequationum integralium, quarum nucleus sit parametri functio.

È ben noto che gran parte dei problemi al contorno relativi a equazioni differenziali lineari ordinarie o alle derivate parziali si possono tradurre in equazioni integrali di seconda specie tipo FREDHOLM. Se il nucleo dell'equazione integrale a cui si perviene è simmetrico e se in esso figura, nel modo noto, un parametro λ, dalla teoria delle equazioni integrali, si può subito dedurre l'esistenza di autovalori per il detto parametro, nonchè la ortogonalità delle relative autosoluzioni. Il teorema di HILBERT-SCHMIDT fornisce inoltre un criterio di convergenza puntuale per lo sviluppo di un'assegnata funzione in serie di tali autosoluzioni.

Se il nucleo dell'equazione integrale a cui si perviene non è simmetrico, nulla si può dire in generale, ma, molto spesso, uno studio diretto del caso particolare che interessa permette di dimostrare l'esistenza di infiniti autovalori.

Si potrà poi ottenere formalmente lo sviluppo di una funzione assegnata in serie di autosoluzioni, basandosi sulla circostanza che le dette autosoluzioni, e quelle dell'equazione integrale trasposta, formano un sistema ortogonale, laddove, per la dimostrazione della convergenza

---

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio G. Armellini, il 1° giugno 1937.

di tale sviluppo, ci si potrà utilmente valere, in molti casi, del cosiddetto metodo di POICARÉ-CAUCHY, esposto dal POICARÉ in una celebre Memoria nel 1894 (1).

Notevoli risultati, in quest'ordine di idee, sono stati ottenuti, per il caso di problemi ai limiti relativi ad equazioni differenziali lineari ordinarie, dal BIRKHOFF (2), dal TAMARKINE (3) e dal KNESER (4).

Molto più difficile si presenta l'analisi dei casi in cui il nucleo dell'equazione integrale è esso stesso funzione del parametro λ. Prescindendo dalla questione dell'esistenza degli autovalori, le maggiori difficoltà si presentano, in questo caso, nel problema dello sviluppo in serie di autosoluzioni e ciò per il fatto che esse, in generale, non costituiscono un sistema ortogonale, nè sono ortogonali a quelle della equazione trasposta.

Voglio ora esporre, a questo proposito, qualche considerazione sull'applicazione del citato metodo di POICARÉ-CAUCHY a quest'ultimo caso.

Consideriamo un'equazione integrale

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b G(x, y, \lambda)\, \varphi(y)\, dy \quad , \tag{1}$$

il cui nucleo sia una funzione reale continua e simmetrica di x e y. Ci metteremo, inoltre, nell'ipotesi che $G(x, y, \lambda)$ sia una funzione analitica di λ, avente, per esempio, soltanto delle singolarità polari.

Supponiamo che la soluzione della [1] $\varphi(x, \lambda)$ riesca una funzione meromorfa di λ avente soltanto poli reali del primo ordine, che designeremo con

$$\lambda_1 \;,\quad \lambda_2 \;,\quad \ldots \;,\quad \lambda_n \;,\quad \ldots$$

(1) H. POICARÉ, *Sur les équations de la physique mathématique*, « Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo », tomo VIII, 1894.

(2) A. KNESER, *Belastete Integralgleichnugen*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo 37, 1914.

(3) J. TAMARKINE, *Sur quelques points de la théorie des équations différentielles lineaires ordinaires et sur la géneralisations de la serie de Fourier*, « Rend. Circ. Mat. di Palermo », tomo 34, 1912.

(4) G. BIRKHOFF, *Boundary values and expansion problems of ordinary linear differential equations*, « Trans. of the Am. Math. Soc. », vol. 9 (1908), pag. 373-395.

È facile, allora, vedere che, se detti poli sono punti ordinari di G (x, y, λ), essi sono autovalori per l'equazione omogenea associata della [1]. Noi li supporremo, per semplicità, di rango 1. Designando allora, con

$$\varphi_1(x)\ ,\quad \varphi_2(x)\ ,\quad \dots\ ,\quad \varphi_n(x)\ ,\quad \dots$$

un sistema di autosoluzioni normalizzate, si trova

$$\lim_{\lambda \to \lambda_n} (\lambda - \lambda_n) \frac{\varphi(x,\lambda) - f(x)}{\lambda} = - \frac{\varphi_n(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_n(y)\, dy}{1 + \lambda^2_n \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \lambda_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds dt}$$

Pertanto, se la funzione $\frac{1}{\lambda}\left[\varphi(x,\lambda) - f(x)\right]$ è sviluppabile in serie di frazioni semplici al modo di Cauchy, si perviene alla seguente formula risolutiva della [1]

$$[2] \quad \varphi(x,\lambda) = f(x) + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \int_a^b f(y)\, \varphi_n(y)\, dy}{(\lambda_n - \lambda)\ (1 + \lambda^2_n \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds dt)}$$

Dalla [2] è poi facile dedurre la seguente formula

[3]

$$\int_a^b G(x, y, \lambda) f(y) dy = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \int_a^b \int_a^b \left[\lambda_n G(y, t, \lambda_n) - \lambda G(y, t, \lambda)\right] f(y)\, \varphi_n(t)\, dt dy}{(\lambda_n - \lambda)\ (1 + \lambda^2_n \int_a^b \int_a^b G_\lambda(s, t, \lambda_n)\, \varphi_n(s)\, \varphi_n(t)\, ds dt)}$$

che rappresenta la naturale estensione del teorema di Hilbert-Schmidt.

Ovviamente, le ipotesi in cui sono valide le [2] e [3] sono molto restrittive e non ci si può attendere che esse siano sempre verificate. Basterebbe pensare che le ordinarie equazioni integrali con nucleo non simmetrico, si possono trasformare in equazioni del tipo [1] con G (x, y, λ) lineare in λ. Il metodo esposto può però rispondere bene al suo scopo nello studio di problemi di tipo particolare, e anche quando non si riesce con la sua applicazione a dimostrare la validità delle [2] e [3], ci si può, tuttavia, valere di esso come di un procedimento euristico atto a fornire risultati assai presumibili.

Io ho preso, per esempio, in considerazione l'equazione [1] in cui $G(x, y, \lambda)$ è del tipo

$$G(x, y, \lambda) = K(x, y) + \frac{\lambda}{\lambda + a} X(x) X(y)$$

con $K(x, y)$ nucleo simmetrico. È facile dimostrare che, se $K(x, y)$ non è specializzato, esistono infiniti autovalori del parametro λ. Ebbene, con procedimenti, che non è qui il caso di precisare, sono riuscito a dimostrare la validità delle formule [2] e [3].

Sarà opportuno dire che questa particolare classe di equazioni non è stata da me scelta a caso: molti problemi al contorno relativi ad equazioni differenziali con condizioni ai limiti che contengono il parametro λ, danno luogo, appunto, ad equazioni integrali di questo tipo.

Quanto ho qui esposto legittima, a mio avviso, la speranza che si possa riuscire a caratterizzare una larga classe di equazioni del tipo [1] per le quali si possa asserire la validità delle formule [2] e [3]. A me sembra che un tale risultato sarebbe assai importante per le applicazioni e mi propongo, quindi, di dedicare all'argomento ulteriori ricerche.