

## PROBLEMI DELLA DINAMICA DEI PONTI(\*)

(Con sette figure)

GIULIO KRALL

SYMMARIVM. — Referuntur limitationes quae respiciunt elasticas trabum amotiones, a mobilibus oneribus uniformis celeritatis productas. Integrodifferentiales istituuntur aequationes, quae exprimunt vibratorium trabum motum, productum a mobilibus oneribus inertibus et mollescentibus. Perpenditur trabs mere apposita, et aequationum, de quibus supra diximus, graphice solutiones exprimuntur.

Il problema centrale della dinamica dei ponti riguarda la caratterizzazione del moto di un'asta semplicemente appoggiata agli estremi percorsa da un treno rigido di carichi (eventualmente ridotto ad uno per semplicità) *pesanti* e quindi *inerti*, in parte direttamente applicati (ruote, assi) in parte molleggiati.

All'asta infatti si lascia schematizzare la classica *travata* dei ponti ferroviari, unica struttura leggera che si considera nel loro ambito, altrimenti dominato da sistemi molto inerti, poco sensibili alle azioni dinamiche.

Per quanto lo studio di questo problema s'inizi, per merito di STOKES (1849) particolarmente, già agli albori delle costruzioni ferroviarie e sia stato attivamente proseguito da RÉSAL (1882), BOUSSINESQUE (1883), DESLANDRES (1892), ZIMMERMANN (1896), KRILOFF (1905) e TIMOSHENKO, non si può affermare certamente ch'esso sia a buon punto, sicchè ormai, per gli sviluppi grandiosi nel campo delle realiz-

---

(\*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio T. Levi-Civita il 1° giugno 1937.

zazioni effettive, in certo senso si potrebbe anche pensare che la questione si trovi superata dalla realtà.

Comunque sia, per eccellenti ragioni, il problema è pur sempre agitato; conviene dunque considerarlo e, possibilmente, avanzarne la soluzione.

Con questo intento daremo qui l'impostazione analitico-meccanica rigorosa e la soluzione numerica di taluni importanti aspetti del problema; ci affrancheremo precisamente dalle ipotesi consuete in cui si trascura la massa del ponte in raffronto a quella dei carichi (STOKES, ZIMMERMANN) o viceversa (KRILOFF, TIMOSHENKO), salvo a tenerne al più conto in via approssimata (BLEICH). Constateremo tra l'altro che certi convincimenti già tratti in questo senso poco rispondono alla realtà e gli aumenti dinamici dovuti all'inerzia dei carichi, *agli effetti della velocità pura*, sono di gran lunga inferiori a quelli che generalmente si ritiene abbiano luogo in misura tanto notevole per i ponti di piccola luce.

In alcune Note apparse nei Rendiconti dell'Accademia dei Lincei già ebbi a trattare delle equazioni del moto vibratorio di un ponte percorso da carichi inerti e molleggiati e compendiarle poi, in una unica equazione integrodifferenziale.

Da questa s'erano tratte alcune notevoli limitazioni rigorose del moto nel caso in cui la massa del carico era trascurabile e con riflesso non solo alla travata ma ad una struttura da ponte qualunque, infine, una soluzione di prima approssimazione nel caso generale che, se era facile scriverla procedendo nello spirito delle approssimazioni successive, era, dal punto di vista del calcolo numerico, poco accessibile.

Mi sia perciò lecito riprendere la questione e trattarla in modo autonomo; per i metodi con cui qui si affronta l'integrazione non occorre arrivare sino all'equazione integrodifferenziale suddetta. Faremo però naturalmente vedere come da quella con una semplice operazione si arrivi all'impostazione attuale forse più nitida, certamente più efficace, della precedente.

I. — EQUAZIONE DEL MOTO  
PER IL CARICO MOBILE PRIVO DI INERZIA.

Consideriamo dunque un'asta di cui sieno note le autofunzioni  $u_e$  ed i corrispondenti autovalori  $\sigma_e$  relativi al moto puramente trasversale. Sia  $\mu$  la massa per unità di lunghezza,  $E$  il modulo d'elasticità,  $J$  il momento d'inerzia funzione dell'unica coordinata misurata lungo l'asse a partire da un estremo. Un carico  $P$ , di cui per ora trascuriamo l'inerzia, la percorre con velocità uniforme  $v$ . Si tratta di descrivere il moto trasversale, che riterremo caratterizzato da una funzione  $w = w(x, t)$  di una coordinata  $x$  misurata sull'asse a partire da un estremo, e del tempo  $t$ , con riflesso alle circostanze iniziali

$$w(x, 0) = 0 \quad , \quad \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad .$$

Introdotte al solito le coordinate normali  $\varphi_e$  si avrà

$$[1] \quad w(x, t) = \sum_1^{\infty} u_e(x) \varphi_e$$

con le  $\varphi_e$  da determinare in base alle equazioni del Lagrange.

Poichè si ha per l'energia cinetica  $T$  ed il potenziale  $U$  l'espressione

$$T = \frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \dot{\varphi}_e^2 \quad , \quad U = -\frac{1}{2} \sum_1^{\infty} \sigma_e^2 \varphi_e^2$$

non resta che calcolare la componente lagrangiana ridotta  $Q_e$  della sollecitazione. All'uopo basta osservare che al tempo  $t$  il carico è in  $x = vt$  ed ha ivi il valore  $P$  mentre è nullo in ogni altro punto. Sarà dunque

$$Q_e = P u_e(vt)$$

Le equazioni lagrangiane divengono allora

$$\ddot{\varphi}_e + \sigma_e^2 \varphi_e = P u_e(vt)$$

La soluzione che per  $t = 0$  si annulla assieme alla prima derivata, com'è richiesto per tutte le  $\varphi_e$  dalle circostanze iniziali prescritte, è data, come si sa, dall'espressione

$$[2] \quad \varphi_e = \frac{1}{\sigma_e} \int_0^t P u_e(vt') \sin \sigma_e(t-t') dt'$$

e la soluzione del problema diviene quindi, in virtù della [1],

$$[3] \quad w(x, t) = \sum_{e=1}^{\infty} \frac{u_e}{\sigma_e} \int_0^t P u_e(vt') \sin \sigma_e(t-t') dt'$$

## II. — ASTA A CARATTERISTICHE COSTANTI.

Sia  $EJ = \text{cost.}$ ,  $\mu = \mu_0 = \text{cost.}$  Si hanno allora, notoriamente, per le  $u_e$  e  $\sigma_e$  le espressioni

$$u_e = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\rho\pi}{l} x, \quad \sigma_e = \frac{\rho^2\pi^2}{\rho^2} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_0}}$$

Ne segue per le  $\varphi_e$ , esplicitando l'integrale [2], posto  $\lambda_e = \frac{\rho\pi v}{l}$ ,

$$[2a] \quad \varphi_e = P \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \frac{\sin \lambda_e t - \frac{\lambda_e}{\sigma_e} \sin \sigma_e t}{\sigma_e^2 - \lambda_e^2}$$

Introduciamo ora la velocità  $v = v_k$  necessaria per fare una escursione completa di andata e ritorno sul ponte nel periodo fondamentale, dunque, poichè questo vale  $\tau_1 = 2\pi : \sigma_1$ ,

$$v_k = \frac{2l}{2\pi} = \frac{l\sigma_1}{\pi} = \frac{\pi}{l} \sqrt{\frac{EJ}{\mu_0}}$$

Con riferimento alle travate normali per ponti ferroviari si hanno i seguenti valori per  $\mu_0$ ,  $v_h$ ,  $\sigma_1$  e lo spostamento  $\delta_s$  che il carico  $P=1$  ton. provoca in mezzzeria

$l$	4	6	10	15	20	25	50	100	150	metri
$\mu_0 g$	1,10	1,20	1,42	1,69	1,96	2,23	3,02	4,37	5,06	ton. m <sup>-1</sup>
$v_h$	1152	1210	1368	1550	1440	1440	1692	1944	2160	km. h <sup>-1</sup>
$\delta_s$	0,0772	0,0962	0,1042	0,1368	0,1439	0,1536	0,1613	0,1639	0,1777	cm. ton <sup>-1</sup>
$\sigma_1$	251	176	119	78,5	62,8	50,3	29,5	16,9	12,6	sec <sup>-1</sup>

Ricordiamo che la frequenza, cioè il numero di oscillazioni nell'unità di tempo, vale  $\sigma : 2\pi$ .

Senza indugiare sull'attributo di *critica* dato alla velocità  $v_h$ , giustificato da condizioni di risonanza rese manifeste dalla definizione stessa, rileviamo che si ha

$$\sigma_e^2 = \rho^4 \sigma_1^2 = \rho^4 \frac{\pi^2}{l^2} v_h^2$$

$$\lambda_e^2 = \rho^2 \lambda_1^2 = \rho^2 \frac{\pi^2}{l^2} v^2$$

La serie [1] si scrive allora, attesa l'espressione trovata per  $\varphi_e$ ,

$$[3a] \quad w(x,t) = P \frac{2}{\pi^4} \frac{l^3}{EJ} \sum_{1}^{\infty} \sin \frac{\rho \pi}{l} x \frac{\sin \frac{\rho \pi v}{l} t - \frac{v}{\rho v_h} \sin \sigma_e t}{\rho^4 - \rho^2 \left(\frac{v}{v_h}\right)^2}$$

Ove si introduca lo spostamento statico che il carico in mezzzeria produce sul suo punto di applicazione,

$$\delta_s = \frac{l^3}{48 EJ}$$

e si rilevi che

$$vt = x', \quad \sigma_e t = \rho^2 \sigma_1 t = \rho^2 \frac{\pi v_h}{l} t = \rho^2 \frac{v_h}{v} \pi \frac{x'}{l}$$

con  $x'$  definiente la posizione del carico, si potrà anche scrivere

$$w(x, x') = P \delta_s D(\xi, \xi')$$

con  $\xi = \frac{x}{l}$ ,  $\xi' = \frac{x'}{l}$  e

$$D(\xi, \xi') = \frac{96}{\pi^4} \sum_{1^q}^{\infty} \sin \rho \pi \xi \frac{\sin \rho \pi \xi' - \frac{v}{\rho v_k} \sin \rho \pi \frac{v_k}{v} \xi'}{\rho^4 - \rho^2 \left(\frac{v}{v_k}\right)^2}$$

Per i valori di  $v$  (intorno ad  $1/10$  di  $v_k$  per i treni più veloci) questa serie è rapidamette convergente, e tanto, che se ne può considerare anche un solo termine. In ogni modo rileverò che per essa ho calcolate limitazioni superiori rigorose, avvalendomi di taluni criteri di maggiorazione desunti dalla disuguaglianza di SCHWARZ.

Si ha precisamente pel fattore numerico  $D(\xi, \xi')$ ,

$$D(\xi, \xi') \leq \frac{48}{1 - \frac{v^2}{v_k^2}} \left\{ \frac{\xi \xi' (1 - \xi)(1 - \xi')}{3} + \frac{v}{v_k} \left( \delta(\xi) - \frac{2}{\pi^4} \sin \pi \xi \sin \frac{v_k}{v} \pi \xi' \right) \right\}$$

con

$$\delta(\xi) = \frac{\xi(1-\xi)}{\sqrt{143,62}} - \frac{2}{\pi^4} \sin \pi \xi$$

qui appresso tabellata

$\xi$	$\delta(\xi)$
0,1	0,00116526
0,2	0,00128260
0,3	0,00091226
0,4	0,00049890
0,5	0,00032900

Si constata con una semplice ispezione che  $D(\xi, \xi')$  dà la linea di influenza per la maggiorazione dinamica sicchè si ha, quando il ponte è percorso da un treno rigido di carichi  $P_1, P_2, \dots, P_N$ ;

$$w(x, t) \leq \delta_s \sum_1^N P_i D(\xi, \xi_i)$$

Per la serie che da  $w(x, t)$  ho calcolato, tenendo conto di tutto il campo di variabilità di  $v$ , tra  $0 - \infty$ , limitazioni superiori rigorose compendiate per il punto di mezzo della trave in fig. 1.

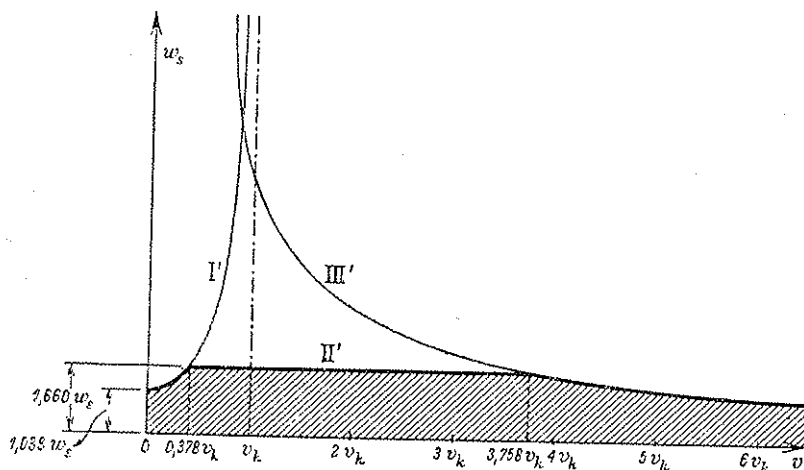


FIG. 1.

Limitazioni superiori per lo spostamento dinamico in mezzeria d'una trave semplicemente appoggiata in funzione della velocità  $v$  del carico mobile.

Si constata che per piccole velocità gli aumenti sono lievi, che non superano mai più del 46% il valore statico e che tendono a zero per  $v \rightarrow \infty$ .

Si rilevi che se si considera il solo primo termine della serie si trova un massimo spostamento in condizioni di risonanza che è 1,42 volte quello statico. Si argomenta da ciò la bontà della limitazione.

Rileverò che per una struttura qualunque si ha la limitazione

$$[4] \quad w(x, t) < \sqrt{\frac{l}{2} c(x, x) \int_0^l \omega(x, x) dx}$$

essendo  $\omega(x, x)$  la rotazione che nella sezione  $x$  provoca il momento  $M = 1$  applicato in  $x$ ;  $c(x, x)$  lo spostamento che in  $x$  provoca il carico  $P = 1$  pure applicato in  $x$ .

Per il caso della trave semplicemente appoggiata questa limitazione porge per la mezzeria il limite  $2w_s$ , alquanto superiore al  $1,56w_s$ , dianzi trovato. Ma da questa si può dedurre una limitazione più efficace, però meno semplice e nitida, che dà valori utilizzabili in pratica.

Una limitazione che fa a meno di alcune ipotesi inerenti alle condizioni di realizzazione del limite [4] mi è stata suggerita dal prof. R. EINAUDI.

A questa si perviene opportunamente adattando la deduzione trovata per la [4]; ecco come:

Considerata la serie [3] che dà l'espressione di  $w(x, t)$  si integri per parti supponendo  $u_0(0) = 0$ . Si trae

$$[3b] \quad w(x, t) = \sum_0 \frac{u_0(x) u_0(vt)}{\sigma_0^2} - \sum_0 \frac{u_0(x)}{\sigma_0^2} J_0(t)$$

con

$$J_0(t) = \frac{1}{\sigma_0} \int_0^t \cos \sigma_0(t-t') \frac{du_0(vt')}{dt'} dt'$$

Per la classica disuguaglianza di SCHWARZ relativa all'integrale del prodotto  $f \cdot g$  di due funzioni  $f$  e  $g$  di una stessa variabile  $t$ ,

$$\int_a^b f g dt \leq \sqrt{\int_a^b f^2 dt \int_a^b g^2 dt},$$

si ha per  $J_0(t)$  la limitazione

$$|J_0(t)| \leq \frac{1}{\sigma_0} \sqrt{\int_0^t \cos^2 \sigma_0(t-t') dt' \int_0^t \left[ \frac{du_0(vt')}{dt'} \right]^2 dt'}$$



ovvero, ponendo  $vt = x$ ,  $\cos^2 \sigma_e(t-t) = 1$ ,

$$|J_e(t)| \leq \frac{1}{\sigma_e} \sqrt{vt \int_0^{vt} \left(\frac{du_e}{dx}\right)^2 dx}$$

Dalla [3b] si ha a sua volta, applicando la disuguaglianza di SCHWARZ relativa alla somma di una serie di prodotti  $a_i b_i$ ,

$$|\sum_i a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_i a_i^2 \sum_i b_i^2} \quad ,$$

la limitazione

$$|w(x,t)| \leq \sum_e \frac{u_e(x)u_e(vt)}{\sigma_e^2} + \sqrt{\sum_e \frac{u_e^2(x)}{\sigma_e^2} \sum_e J_e^2(t)}$$

e quindi, per la limitazione trovata per  $J_e$ ,

$$|w(x,t)| \leq \sum_e \frac{u_e(x)u_e(vt)}{\sigma_e^2} + \sqrt{\sum_e \frac{u_e^2(x)}{\sigma_e^2} \cdot vt \cdot \int_0^{vt} \frac{1}{\sigma_e^2} \left(\frac{du_e}{dx}\right)^2 dx}$$

Avendosi infine, per gli elementi della teoria delle equazioni integrali,

$$\sum_e \frac{u_e(x)u_e(x')}{\sigma_e^2} = c(x, x') \quad \sum_e \frac{\left(\frac{du_e(x)}{dx}\right)^2}{\sigma_e^2} = \omega(x, x) \quad ,$$

si trae in definitiva in luogo della limitazione [4] la limitazione suggerita, valida in rigore,

$$|w(x,t)| \leq c(x, vt) + \sqrt{c(x, x) \cdot vt \int_0^{vt} \omega(x, x) dx}$$

Essa da, per  $vt = l$  e  $x = \frac{l}{2}$ , un valore  $(1 + \sqrt{2})$  volte maggiore della [4]; per  $vt = \frac{l}{2}$ ,  $x = \frac{l}{2}$ , sempre per la trave semplicemente appoggiata, avendosi

$$\int_0^{\frac{l}{2}} \omega(x, x) dx = \frac{l}{12 EJ} \quad , \quad c(x, x) \Big|_{x=\frac{l}{2}} = \frac{l^3}{48 EJ} = w_s$$

E, J essendo il modulo d'elasticità rispettivamente il momento d'inerzia della sezione resistente,

$$|w(x, t)| \leq (1 + \sqrt{2}) w_s$$

### III. — CARICO INERTE.

Se il carico è inerte, allora, in luogo del carico P va considerata la *forza perduta*

$$P - \frac{P}{g} \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}$$

e le equazioni nelle  $\varphi_e$  divengono, se si pone  $\frac{P}{g} = M$ ,

$$\ddot{\varphi}_e + \sigma_e^2 \varphi_e = \left( P - M \frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2} \right) u_e(vt)$$

Esprimendo  $w$  in termini di  $u_e$  e  $\varphi_e$  si ha, ricordando che

$$w = \sum_{1^e}^{\infty} u_e(x) \varphi_e,$$

$$\frac{d^2 w}{dt^2} = \sum_{1^e}^{\infty} \ddot{u}_e(vt) \cdot \varphi_e + 2 \sum_{1^e}^{\infty} \dot{u}_e(vt) \dot{\varphi}_e + \sum_{1^e}^{\infty} u_e(vt) \ddot{\varphi}_e;$$

$$[5] \quad \ddot{\varphi}_e + \sigma_e^2 \varphi_e = \left\{ P - M \sum_{1^e}^{\infty} \ddot{\varphi}_e u_e(vt) + 2 \dot{\varphi}_e \dot{u}_e(vt) + \varphi_e \ddot{u}_e(vt) \right\} u_e(vt)$$

( $\rho = 1, 2, \dots$ ;) )

Se però si pensa che al piano stradale si può dare una curvatura iniziale andrebbero aggiunti termini che in parte ridurrebbero i due primi dalle espressioni di  $\frac{d^2 w}{dt^2}$ . In tale circostanza si potrebbe porre

$$\frac{d^2 w}{dt^2} \approx \left( \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right)_{x=vt} = \sum_{1^e}^{\infty} u_e(vt) \ddot{\varphi}_e$$

In ogni modo si osservi che anche trascurando codesti due termini si ottengono risultati sostanzialmente analoghi come alcune rigorose esplorazioni numeriche fatte e compendiate nei grafici consentono di affermare.

È il sistema [5] un sistema di equazioni differenziali non più a variabili separate e neanche a coefficienti costanti come venne fatto di

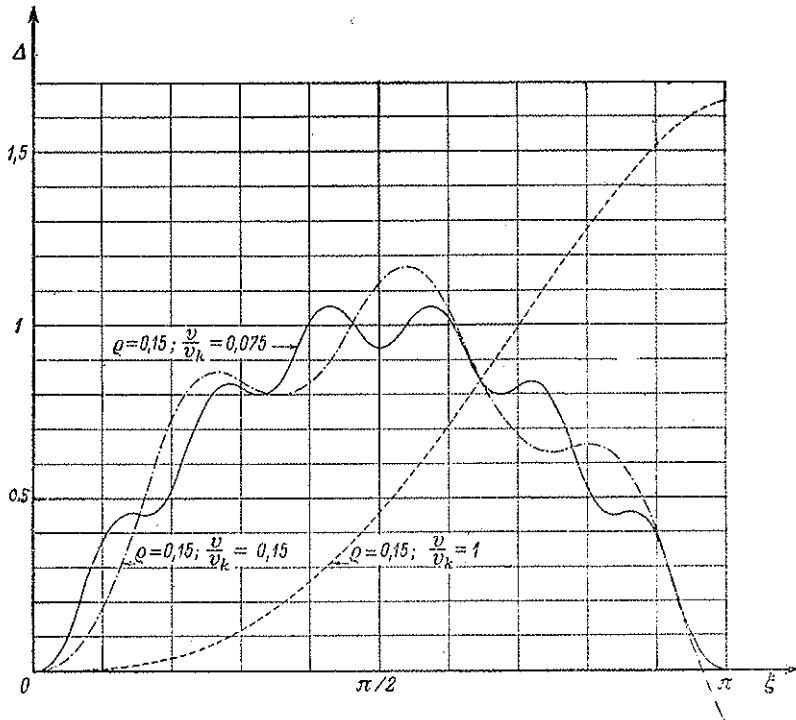


FIG. 2.

Lo spostamento  $w(\bar{x}, t)$  della sezione generica  $x = \bar{x}$  vale

$$w(\bar{\xi}, \xi) = 0,9855 P \delta_s \sin \bar{\xi} \Delta(\xi)$$

con

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l} \pi, \quad \xi = \frac{vt}{l} \pi, \quad \delta_s = \frac{l^3}{48 EJ}$$

$l$  = luce della travata,  $E$  = modulo d'elasticità,  $J$  = momento d'inerzia della sezione resistente,  $\rho$  = rapporto tra massa del carico e metà della massa della travata. Per  $v_k$ ,  $\delta_s$  si confronti la tabella a pag. 9.

riscontrare precedentemente. Se ci si accontenta del solo primo termine dello sviluppo in serie delle  $u_0$  di  $\frac{d^2 w(vt, t)}{dt^2}$  si ha

$$[5a] \quad \ddot{\varphi}_1 + \sigma_1^2 \varphi_1 = \left\{ P - M [\ddot{\varphi}_1 u_1(vt) + 2 \dot{\varphi}_1 \dot{u}_1(vt) + \varphi_1 \ddot{u}_1(vt)] \right\} u_1(vt)$$

e la prima equazione nella coordinata normale diviene, raccogliendo opportunamente,

$$[5b] \quad \ddot{\varphi}_1 \left\{ 1 + M u_1^2(vt) \right\} + \varphi_1 (\sigma_1^2 + M \ddot{u}_1(vt)) + 2 \dot{\varphi}_1 M u_1(vt) \dot{u}_1(vt) = P u_1(vt) .$$

Si tratta, come si vede manifestamente, di un'equazione differenziale lineare a coefficienti variabili.

Per il caso dell'asta omogenea in cui

$$u_1(vt) = \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \frac{\pi vt}{l} , \quad \sigma_1^2 = \frac{\pi^4}{l^4} \frac{EJ}{\mu_0}$$

essa diviene, posto  $\rho = \frac{2M}{\lambda\mu_0}$ ,

$$[5c] \quad \ddot{\varphi}_1 (1 + \rho \sin^2 \lambda_1 t) + \varphi_1 \left\{ \frac{\pi^4 EJ}{l^4 \mu_0} - \rho \lambda_1^2 \sin \lambda_1 t \right\} + \rho \sin \lambda_1 t \dot{\varphi}_1 = P \sqrt{\frac{2}{l\mu_0}} \sin \lambda_1 t .$$

Introducendo la trasformazione di variabili per ridursi alle dimensioni zero,

$$\xi = \frac{x}{l} \pi , \quad t = \frac{x}{v} = \frac{\xi}{\lambda} ,$$

posto

$$\varphi_1(t) = \varphi_1 \left( \frac{\xi}{\lambda} \right) = P \delta_s \sqrt{\frac{l\mu_0}{2}} \frac{96}{\pi^4} \Delta(\xi)$$

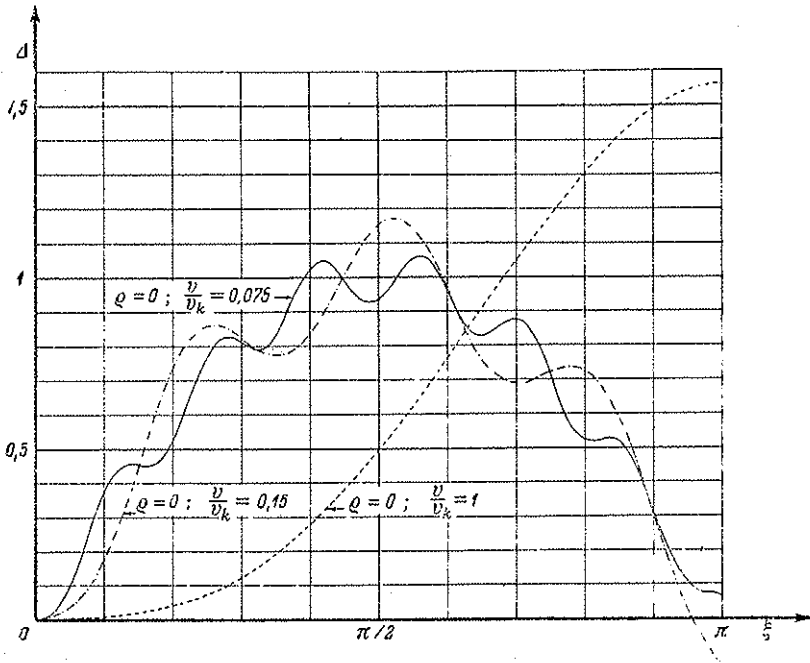


FIG. 3.

Cfr. la leggenda della figura 2.

e rilevato che

$$\frac{\lambda}{\sigma} = \frac{v}{v_k} , \quad \lambda = \frac{\pi v}{l}$$

risulta

[5d]

$$\frac{d^2 \Delta}{d\xi^2} \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \left\{ 1 + \rho \sin^2 \xi \right\} + \Delta(\xi) \left\{ 1 - \rho \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \sin^2 \xi \right\} + \frac{d\Delta}{d\xi} \rho \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \sin 2\xi = \sin \xi$$

Si ha così, trascurando nella serie [1] tutti i termini successivi al primo, preso riferimento ad una generica sezione  $x = \bar{x}$ ,

$$w(\bar{x}, t) \simeq u_1(\bar{x}) \cdot \varphi_1(t)$$

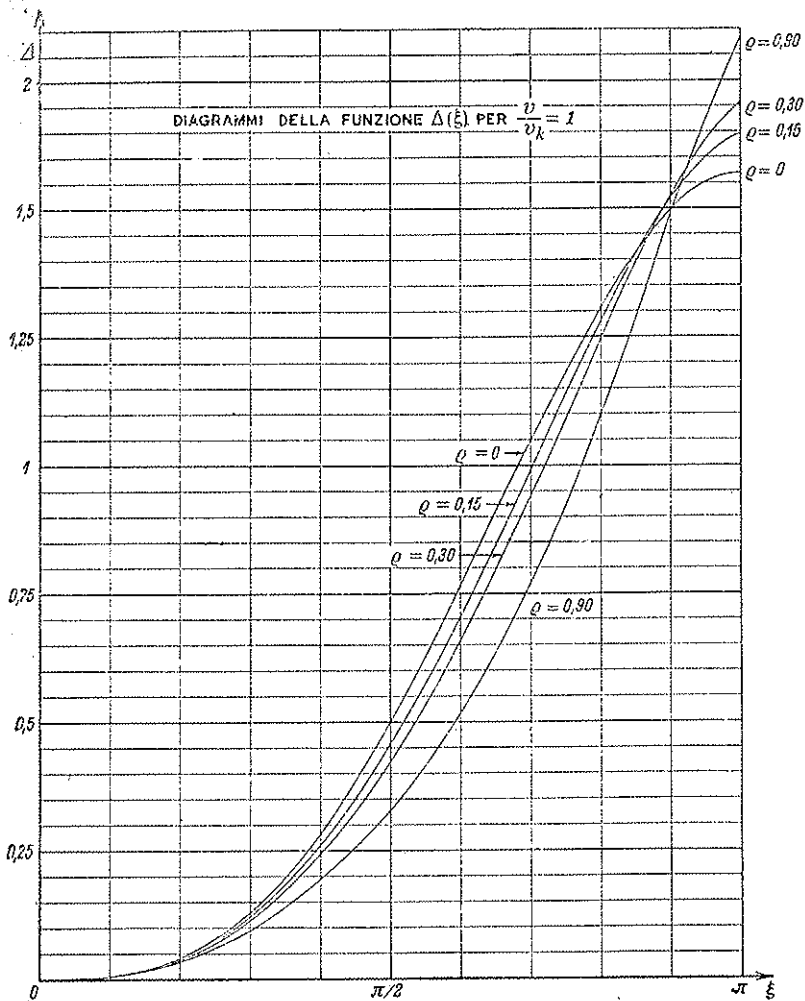


FIG. 4.

Cfr. la leggenda della figura 2.

ovvero, con riflesso alla definizione di  $u_1(x)$  ed alle posizioni fatte, poichè  $96:\pi^4 = 0,9855$ ,

$$w(\bar{\xi}, \xi) = 0,9855 P \delta_s \cdot \sin \bar{\xi} \cdot \Delta(\xi)$$

essendo

$$\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l} \pi, \quad \delta_s = \frac{l^3}{48 EJ}$$

#### IV. — CASO DEL MOLLEGGIO PARZIALE.

Supponiamo che della massa  $M$  una parte  $(1 - \chi)$  sia molleggiata l'altra  $\chi M$  direttamente applicata (in pratica si ha  $\chi \cong 0,25$ ).

Quale sarà il carico da sostituire in luogo di  $P$ ?

Si avrà evidentemente

$$P - \chi M \frac{d^2 w}{dt^2} + \Pi$$

essendo  $\Pi$  la pressione del molleggio dovuta ai soli scostamenti dalla configurazione di equilibrio (sotto al carico  $(1 - \chi) Mg$ ).

Ora, se si indica con  $\varepsilon^2$  il coefficiente di elasticità della molla si avrà

$$\Pi = \varepsilon^2 (w'(t) - w(vt, t))$$

e  $w'$  soddisferà l'equazione

$$(1 - \chi) M \frac{d^2 w'}{dt^2} + \varepsilon^2 (w' - w) = 0$$

Se al tempo  $t = 0$  in cui il carico imbecca il ponte è  $w = 0$  e  $\dot{w} = 0$ , si trae per  $w$  la soluzione

$$w' = v \int_0^t \sin v(t - t') w(vt', t') dt'$$

essendo

$$v^2 = \frac{\varepsilon^2}{(1 - \chi) M};$$

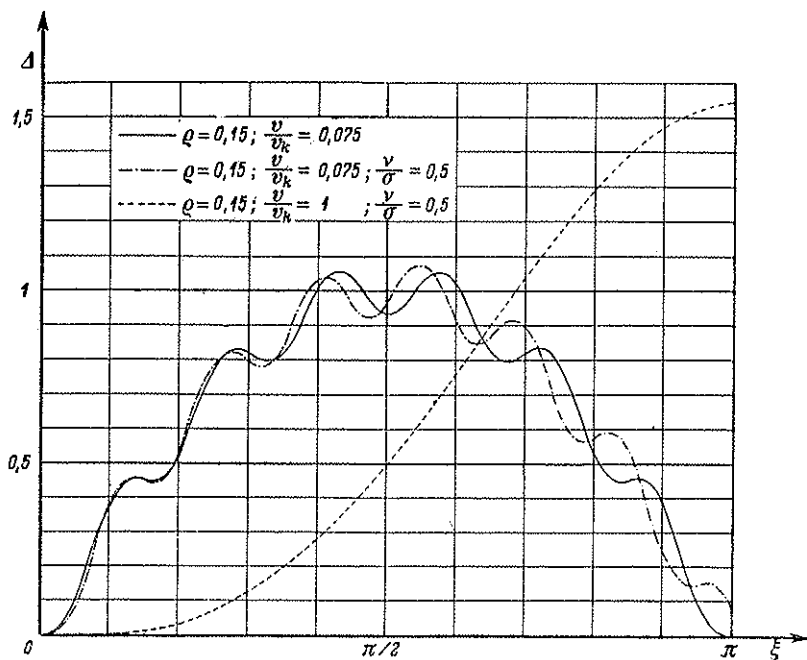


FIG. 5.

Cfr. la leggenda della figura 2.

Si considera il molleggio del carico;  $\nu$  è la frequenza della massa sospesa,  $\sigma$  la frequenza del ponte (cfr. tabella a pag. 9).

il carico mobile sarà perciò rappresentato da

$$P - \chi M \frac{d^2 w(\nu t, t)}{dt^2} + \varepsilon^2 \left\{ \nu \int_0^t \sin \nu(t-t') w(\nu t', t') dt' - w(\nu t, t) \right\}$$

Introduciamo in luogo di  $P$  codesta espressione nella [3] e scriviamo in luogo di  $w$

$$w = \sum_{1}^{\infty} u_e(\nu t) \varphi_e$$



Otteniamo il sistema di equazioni integro-differenziali nelle  $\varphi_e$

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_e + \sigma_e^2 \varphi_e = & \left\{ P - \chi M \frac{d^2 \sum_1^{\infty} u_e(vt) \varphi_e}{dt^2} + \right. \\
 [6] \quad & \left. + \varepsilon^2 \left[ \nu \int_0^t \sin \nu(t-t') \cdot \sum_1^{\infty} u_e(vt') \varphi_e(t') dt' - \sum_1^{\infty} u_e(vt) \varphi_e(t) \right] \right\} u_e(vt)
 \end{aligned}$$

L'equazione in  $\varphi_1$  diviene, trascurando tutte le  $\varphi_e$  successive alla prima

$$\begin{aligned}
 \ddot{\varphi}_1 \left\{ 1 + \chi M u_1^2(vt) \right\} + \varphi_1 \left\{ \sigma_1^2 + \chi M \ddot{u}_1(vt) u_1(vt) + \varepsilon^2 u_1^2(vt) \right\} + 2\dot{\varphi}_1 \chi M \dot{u}_1(vt) u_1(vt) - \\
 [6a] \quad - \varepsilon^2 \nu u_1(vt) \int_0^t \sin \nu(t-t') u_1(vt') \varphi_1(t') dt' = P u_1(vt)
 \end{aligned}$$

Per l'asta omogenea, usando le stesse posizioni fatte nel caso delle masse non molleggiate, precisamente

$$\xi = \frac{x}{l} \pi, \quad t = \frac{\xi}{\lambda}, \quad \varphi_1 = P \delta_s \sqrt{\frac{l \mu_0}{2}} \frac{96}{\pi^4} \Delta(\xi), \quad \delta_s = \frac{l^3}{48 E J}$$

che portano la  $w(x, t)$  per  $x = \bar{x}$  alla forma

$$[7] \quad w(\bar{x}, t) = P \frac{96}{\pi^4} \delta_s \sin \bar{\xi} \Delta(\xi)$$

si ottiene

$$\begin{aligned}
 \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 (1 + \chi \rho \sin^2 \xi) \frac{d^2 \Delta}{d\xi^2} + \chi \rho \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \sin 2\xi \frac{d\Delta}{d\xi} + \\
 [6b] \quad + \left[ 1 - \chi \rho \left( \frac{v}{v_k} \right)^2 \sin^2 \xi + \left( \frac{v}{\sigma} \right)^2 \rho (1 - \chi) \sin^2 \xi \right] \Delta - \\
 - (1 - \chi) \left( \frac{v}{\sigma} \right)^3 \frac{v_k}{v} \rho \sin \xi \int_0^\xi \Delta(\xi') \sin \xi' \cdot \sin \left[ \frac{v}{\sigma} \frac{v_k}{v} (\xi - \xi') \right] d\xi' = \sin \xi
 \end{aligned}$$

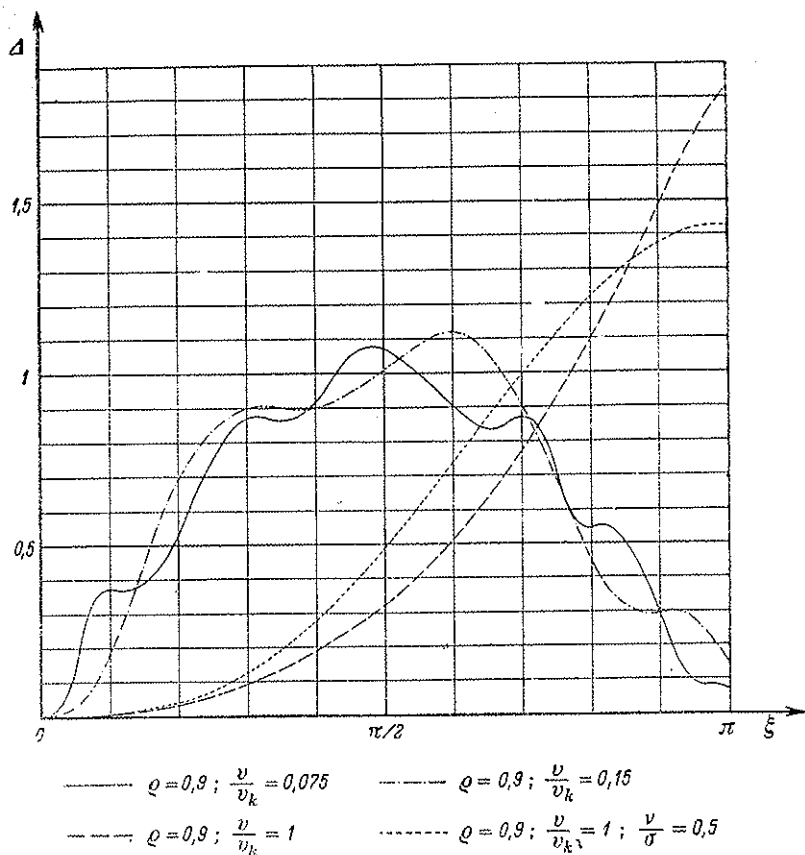


FIG. 6.

Cfr. la leggenda della figura 5.

e se si pone  $\chi = 0$ ,

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{v}{v_k}\right)^2 \frac{d^2 \Delta}{d\xi^2} + \left[1 - \left(\frac{v}{\sigma}\right)^2 \rho \sin^2 \xi\right] \Delta - \\
 [6c] \quad & - \left(\frac{v}{\sigma}\right)^3 \frac{v_k}{v} \rho \sin \xi \int_0^\xi \Delta(\xi') \sin \xi' \sin \left[\frac{v}{\sigma} \frac{v_k}{v} (\xi - \xi')\right] d\xi' = \sin \xi
 \end{aligned}$$

Le equazioni [5c] e [6c], differenziale lineare del second'ordine a coefficienti variabili la prima, integrodifferenziale lineare del secondo

ordine a coefficienti variabili la seconda, sono state affrontate dall'Istituto per le Applicazioni del Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche coi metodi d'integrazione numerica secondo CAUCHY-LISCHPITZ.

Si considerarono gruppi dei parametri  $\rho, \frac{v}{v_k}$  rispettivamente  $\rho, \frac{v}{v_k}, \frac{v}{\sigma}$  che intervengono nella pratica e nel caso limite, come sappiamo assai discosto dalla realtà, in cui  $v$  tende alla velocità  $v_k$  cosiddetta *critica* (in assenza di masse mobili) e si sono determinate, nel campo  $0 \leq \xi \leq \pi$ , che corrisponde alla luce del ponte, essendosi posto  $\xi = \frac{x}{l} \pi$ , le soluzioni  $\Delta = \Delta(\xi)$  a partire dalle condizioni iniziali spettanti alla configurazione naturale ed alla quiete, quindi

$$\Delta(0) = 0, \quad \left(\frac{d\Delta}{d\xi}\right)_{\xi=0} = 0$$

I risultati di questi faticosi scandagli sono riportati nei diagrammi (cfr. fig. 2, 3, 4, 5, 6, 7) che traducono sinteticamente tabelle calcolate con l'approssimazione del  $1/1000$ .

Si constata da una semplice ispezione che, dando la [7] lo spostamento in  $\bar{x}$ , ovvero in  $\bar{\xi} = \frac{\bar{x}}{l} \pi$ , quando il carico è in  $x = vt$  dunque in  $\xi = \frac{vt}{l} \pi$ , i diagrammi in questione rappresentano le linee di influenza per lo spostamento in  $\bar{\xi}$  a meno del fattore  $\frac{96}{\pi^4} P \delta_s \sin \bar{\xi}$ . Esse determinano quindi (moltiplicate per  $96 : \pi^4$ ) il coefficiente  $> 1$  d'aumento dinamico in funzione del posto che ha il carico mobile (all'istante  $t = x : v$ ). Sarà bene rilevare che, a meno che non sia  $\rho = 0$ , queste linee d'influenza si riferiscono al *carico solitario* in quanto la sovrapposizione degli effetti non è più legittima se  $\rho \neq 0$ ; che, se gli spostamenti sono proporzionali ai carichi non lo sono invece in raffronto alla loro inerzia; il carico (la forza) interviene come termine perturbante ordinario nella equazione differenziale lineare del moto, l'inerzia corrispondente ne perturba invece i coefficienti.

In ogni modo, confrontando i diagrammi spettanti alle circostanze in cui  $\rho = 0$  e  $\rho \neq 0$  si constata che, per le velocità ordinarie ( $v \cong 1/10 v_k$ ) l'effetto d'inerzia non è rilevante, sicchè addirittura, in linea appros-

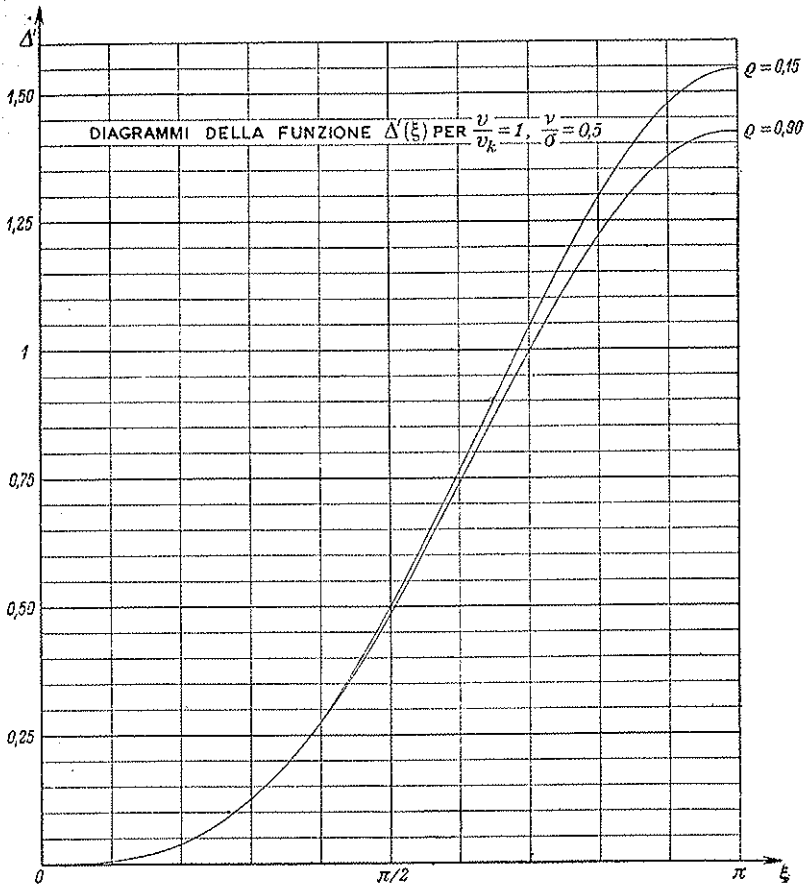


FIG. 7.

Cfr. la leggenda della figura 5.

simata, ai diagrammi in questione si può attribuire la portata di linee di influenza nel senso ordinariamente inteso in statica.

Merita rilevare che, mentre l'azione dell'inerzia si fa sentire fortemente nel campo delle velocità critiche, risulta invece, per le velocità ordinarie, agli effetti della velocità pura, per ruote perfettamente levigate e per un binario ideale, assai lieve sia essa molleggiata o no. E ciò, anche per ponti di piccola luce. Che poi i ponti di minor luce

risentano particolarmente le azioni dinamiche nessun dubbio, ma esse sono di altra natura. Accanto all'effetto di velocità ed inerzia si debbono considerare i carichi mobili armonici, la perniciosa azione dei *giunti* nelle rotaie, delle deformazioni delle rotaie stesse.

Senza insistere ulteriormente sulla questione mi sia lecito porre in rilievo come, traverso l'impostazione rigorosa di un vecchio problema e per merito della possibilità offertami dal Direttore dell'Istituto di Calcolo del Consiglio Nazionale delle Ricerche, Prof. M. PICONE, di scandagliare numericamente le soluzioni di equazioni differenziali ed integrodifferenziali irte di difficoltà eccezionali è stato possibile trarre risultati assai significativi che consentono di abbandonare certe empiriche limitazioni non rispondenti alla realtà. È ben vero che per il tramite di soluzioni intuitivamente approssimate delle equazioni in questione, almeno in taluni casi, si può anche arrivare a risultati in linea generale quantitativamente analoghi, ma ad essi non si potrebbe dare, naturalmente, alcun affidamento.

Sia detto infine che nelle integrazioni numeriche eseguite non si è valutato l'errore ma si è diviso l'intervallo in 90, 180, 270, 360 parti constatando sempre la stabilizzazione della soluzione già alla prima o seconda stretta del passo.