PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. XII - N. 8
pag. 57-80

QUATERNIONS ET ESPACE ELLIPTIQUE (*)

GEORGES LEMAITRE
Académicien Pontifical

SVMMARIVM. — Auctor quaterniones adhibet ut, rationem a Klein usurpatam in Erlangeniano programmate secutus, praecipuas elliptici spatii proprietates determinet.

1. - INTRODUCTION

Les quaternions ont été inventés en 1843 par Sir WILLIAN ROWAN HAMILTON. Il est difficile d'imaginer avec quel enthousiasme, mais aussi avec quelle confusion, cette idée géniale a été développée par son auteur.

Dans une « Introduction to quaternions » publiée à Londres (Mac Millan 1873) par P. KELLAND et P. G. TAIT, le premier des auteurs déclare: « The first work of Sir Wm HAMILTON *Lectures on Quaternions* (1852), was very dimly and imperfectly undestood by me and I dare say by others ». Il ajoute que les *Elements of Quaternions* (1865) et même l'exposé plus clair de son co-auteur P. G. TAIT: *An elementary Treatise on Quaternions* ne peuvent être considérés comme élémentaires.

Le livre lui-même dont ces remarques sont tirées a certainement un caractère élémentaire, il exagère même dans ce sens, en présentant des démonstrations de théorèmes trop connus pour lesquels l'emploi d'un nouveau type de calcul ne semble pas se justifier.

(*) Nota presentata nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

Pourtant l'influence de la découverte d'HAMILTON a été très grande. Non seulement, c'est d'elle que s'est dégagé le calcul vectoriel, avec ses notions si fécondes de produit scalaire et de produit vectoriel, mais aussi le développement de la géométrie elliptique par CAYLEY, CLIFFORD etc. semble avoir été fortement influencée par le nouveau calcul, ainsi qu'en témoigne le titre d'un ces travaux: « Preliminary sketch on bi-quaternions » (1873).

Je ne me propose pas de débrouiller l'histoire touffue de ces découvertes, mais, en étudiant l'espace elliptique ou sphérique, il m'est apparu que les quaternions fournissent des notations extrèmement simples et élégantes d'où les propriétés de cet espace découlent immédiatement.

Comme l'espace elliptique joue dans les théories cosmogoniques un rôle de plus en plus grand, j'ai pensé qu'un exposé qui ne suppose chez le lecteur que des connaissances élémentaires de géométrie analytique pourrait présenter quelqu'utilité même si les spécialistes de l'algèbre, de la géométrie et de l'histoire de la science du siècle dernier, doivent porter le jugement qu'il ne contient rien de vraiment neuf.

Pour l'historique de la question, le lecteur pourra se rapporter aux traités de géométrie et particulièrement à l'ouvrage de W. BLASCHKE *Nicht Euklidische Geometrie und Mechanik* (Teubner 1942) qui présente plus d'un point commun avec le présent exposé mais s'adresse à une tout autre catégorie de lecteurs.

2. – VECTEURS

Un vecteur peut être envisagé au point de vue géométrique et au point de vue algébrique.

Au point de vue algébrique, le vecteur s'obtient en partant du corps des nombres réels, appelés *scalaires*, en leur adjoignant des symboles nouveaux non contenus dans le corps des nombres réels, et désignés ordinairement par les lettres i, j, k.

Sauf pour ces trois lettres, dont l'emploi est consacré par l'usage, nous supposerons que toute lettre latine désigne un scalaire, c'est à dire un nombre réel.

Un vecteur sera donc représenté par

$$xi + yj + zk \;.$$

L'addition des vecteurs et la multiplication par un scalaire s'obtiendra en appliquant les règles ordinaires du calcul comme si i, j, k étaient des nombres. Le résultat de ces opérations sera encore un vecteur.

Géométriquement, les symboles i, j, k représentent une *base* c'est à dire trois vecteurs de longueur unité et non situés dans un même plan. Nous supposerons que cette base est orthogonale, c'est à dire que les trois vecteurs i, j, k sont deux à deux perpendiculaires.

Alors, les trois scalaires x, y, z sont les *composantes,* ou projections orthogonales du vecteur, sur les trois vecteurs de la base.

Les composantes de la somme de deux vecteurs sont les sommes des composantes de ces vecteurs.

3. – Directions

Il est usuel de désigner les vecteurs par des lettres grecques. Nous nous écarterons pourtant quelque peu de cette notation traditionnelle en réservant les lettres grecques aux seuls vecteurs unitaires, c'est à dire aux vecteurs pour lesquels la somme des carrés des composantes est égal à un.

Il nous a paru nécessaire d'introduire une désignation plus brève pour l'expression « vecteur unitaire ». Le terme « direction » nous a paru approprié. En effet, puisqu'un vecteur est une grandeur dirigée, le vecteur unitaire, dont la grandeur est fixée une fois pour toute, ne fait plus qu'indiquer la direction et le terme direction lui convient bien.

4. – Quaternions

L'idée maîtresse d'Hamilton a été de définir la loi de multiplication des symboles i, j, k et cela de telle façon que toutes les règles du calcul algébrique restent valides à l'exception d'une seule: la propriété commutative de la multiplication. Il fonda ainsi l'algèbre non-commutative.

Dans cette algèbre, la valeur d'un produit peut dépendre de l'ordre des facteurs.

Partant de la table de multiplication de deux des symboles i et j, soit

$$i^2 = -1 \qquad j^2 = -1 \qquad ij = -ji = k$$

on déduit aisément de ces formules (par l'application des règles ordinaires du calcul, en prenant soin de respecter l'ordre dans lequel se présentent les facteurs) que les formules analogues obtenues en permutant circulairement les lettres i, j, k, soit

$$k^2 = -1 \qquad jk = -kj = i \qquad ki = -ik = j$$

sont valables.

Appliquant ces règles de calcul au produit d'une direction de composantes x, y, z, par une autre direction α' de composant x', y', z' on obtient

$$\begin{aligned}\alpha\alpha' = -(xx' + yy' + zz') & \\ + (yz' - zy')\, i & \\ + (zx' - xz')\, j & \\ + (xy' - yx')\, k & \;.\end{aligned}$$

Cette expression est formée d'une partie scalaire et d'une partie vectorielle.

L'usage a prévalu d'appeler produit scalaire la partie scalaire changée de signe, tandisque la partie vectorielle est encore ce que nous appellons le produit vectoriel des deux vecteurs.

Cet agrégat d'un scalaire et d'un vecteur est ce qu'on appelle un quaternion.

5. – Quaternions conjugués

On peut remplacer les trois vecteurs de base i, j, k par une autre base de chiralité opposée, c'est à dire présentant avec la première les même rapports que la main droite avec la main gauche.

Un telle base est

$$i' = -i \qquad j' = -j \qquad k' = -k\,.$$

Il existe entre les i', j', k' des relations analogues à celles qui existent entre i, j, k. Mais les facteurs y sont transposés c'est à dire écrits dans l'ordre inverse.

Par exemple de

$$k = ij = -ji$$

on déduit

$$k' = j'i' = -i'j'\,.$$

Supprimant les accents comme inutiles, on dira que le quaternion conjugué est le même quaternion mais rapporté à la base de chiralité opposée. On obtiendra donc le quaternion conjugué en conservant la partie scalaire et en changeant le signe de la partie vectorielle ou, si le quaternion est écrit comme un produit de quaternions, en multipliant les conjuguées des facteurs écrits dans l'ordre inverse.

6. – Verseurs

Le produit d'un quaternion par le quaternion conjugué est un scalaire, qu'on appelle la norme du quaternion.

La norme du produit de deux quaternions Q et Q' est la produit $QQ'\mathbf{Q}'\mathbf{Q}$. Mais $Q'\mathbf{Q}'$ produit de Q' par le quaternion conjugué $\mathbf{Q}'$ est la norme N' de Q', de même $N = Q\mathbf{Q}$ est la norme de Q. La norme du produit est donc le produit des NN' normes des facteurs.

Un quaternion dont la norme est égale à un s'appelle un verseur. Le produit de deux verseurs est un verseur.

Une direction peut être considérée comme un quaternion. C'est un quaternion dont la partie scalaire est nulle.

En outre c'est un verseur. En effet, si dans la formule du produit de deux directions, nous faisons d'abord $\alpha' = \alpha$, ce produit est égal à moins un, de telle façon que les directions peuvent être considéres comme des racines de moins un.

Le conjugué du vecteur est ce vecteur changé de signe, la norme, produit du vecteur par le vecteur conjugué, est donc le carré changé de signe, c'est à dire plus un. Une direction est donc un verseur.

Si u est le scalaire et $v\,\gamma$ de grandeur v et de direction γ le vecteur d'un verseur V, on aura

$$V = u + v\gamma$$

avec

$$u^2 + v^2 = 1$$

Nous pourrons donc écrire

$$u = \cos c \;, \qquad v = \sin c$$

et donc

$$V = \cos c + \gamma \sin c$$

Si

$$V = \alpha\,\alpha'$$

$-\cos c$ est le produit scalaire des deux directions α et α' tandisque le produit vectoriel est un vecteur de grandeur $\sin c$ et de direction γ.

On pourra donc interpréter géométriquement γ et c en disant que γ est une direction perpendiculaire au plan des deux directions α et α' et que c est le supplément de l'angle formé par ces directions, c'est à dire l'angle extérieur de ces deux directions.

Réciproquement, tout verseur est le produit de deux directions situées dans un plan perpendiculaire au vecteur du verseur et formant un angle, dans le sens convenable, égal à $\pi - c$.

Les formules de la géométrie analytique fournissent un équivalent algébrique de ces notions géométriques. Elles permettent d'établir le résultat que nous venons d'obtenir même si on se place à un point de vue purement algébrique.

Le produit de deux directions n'est une direction que lorsque le produit scalaire est nul, c'est à dire lorsque les deux directions sont perpendiculaires.

Si donc α et β sont perpendiculaires, c'est à dire si

$$\alpha\beta = -\beta\alpha$$

alors ce produit est égal à une direction γ qui est perpendiculaire à α et à β.

7. – Notation exponentielle.

Il est très utile de représenter un verseur en employant la notation

$$V = e^{c\gamma}$$

que nous allons expliquer.

L'exponentielle se définit par son développement en série de puissances

$$e^{c\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c^n}{n!} \gamma^n$$

qui peut se décomposer en

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m}}{(2m)!} \gamma^{2m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{c^{2m+1}}{(2m+1)!} \gamma^{2m+1}$$

Comme

$$\gamma^{2m} = (-1)^m$$

et

$$\gamma^{2m+1} = (-1)^m \gamma$$

et que les développement du cosinus et du sinus sont respectivement

$$\cos c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m c^{2m}}{(2m)!}$$

et

$$\sin c = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-)^m c^{2m+1}}{(2m+1)!}$$

on obtient bien

$$e^{c\gamma} = \cos c + \gamma \sin c$$

Il est clair que, tant qu'on n'a affaire qu'à des exponentielles qui contiennent la même direction, c'est à dire la même racine de moins un, on peut utiliser les règles du calcul des exponentielles et en particulier la loi

$$e^{c\gamma} e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

Remarquons encore que si α est perpendiculaire à γ on a

$$\alpha e^{c\gamma} = e^{-c\gamma} \alpha$$

en effet, le premier membre est

$$\alpha \cos c + \alpha\gamma \sin c = \alpha \cos c - \gamma\alpha \sin c = (\cos c - \gamma \sin c)\, \alpha$$

8. – Le programme d'Erlangen.

Dans notre exposé de la géométrie sphérique et elliptique, nous allons adopter le point de vue proposé par Klein dans le programme d'Erlangen.

La géométrie est alors spécifiée lorsqu'on se donne, pour tout couple de points, une certaine expression appelée l'invariant de distance. Deux couples de points pour lesquels l'invariant de distance a mêmes valeurs sont alors considérés comme congruents ou superposables.

Une transformation qui transforme tout couple de points en un couple de points ayant même invariant de distance s'appelle un déplacement et l'étude des groupes de déplacements se réduit à l'étude des groupes de transformations qui laissent invariant l'invariant de distance.

La distance elle-même doit être une fonction de l'invariant de distance, telle que la longueur d'un segment de droite divisé en deux segments partiels soit la somme des longueurs de ces segments.

La longueur du segment est définie comme étant la distance de ses extrémités.

Quant à la droite, nous la considérerons comme un axe de rotation c'est à dire comme un lieu de points laissés invariants par un déplacement.

9. – L'invariant de distance.

Nous supposerons que chaque point de l'espace sphérique est spécifié par un verseur V.

Si V et V′ sont les verseurs représentatifs de deux points nous définirons l'invariant de distance de ce couple de points par le scalaire

$$\mathrm{I} = \frac{1}{2} (\mathrm{V}\, \mathbf{V}' + \mathrm{V}'\, \mathbf{V})$$

dans cette expression $\mathbf{V}$ et $\mathbf{V}'$ désignent le conjugués de V et V′.

Ces définitions suffisent pour définir la géométrie au sens du programme d'ERLANGEN.

Quoique cela ne soit pas nécessaire pour la suite de l'exposé nous intercalons ici quelques remarques qui n'ont d'autre but que de montrer comment nous avons été amenés à choisir ce point de départ.

Si u est le scalaire et x, y, z les composantes du vecteur du du verseur V, on a

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 1$$

qui peut être considéré comme une hyper-sphère de rayon un ou espace sphérique. Ceci montre comment un verseur peut caractériser un point de l'espace sphérique.

De même, si les lettres accentuées désignent les quantités analogues pour le verseur V', l'invariant de distance est

$$\mathrm{I} = xx' + yy' + zz' + uu'$$

expression qui généralise à quatre dimensions l'expression du cosinus d'un angle en fonction des cosinus directeurs des directions de ses côtés.

Nous pouvons donc prévoir que l'invariant de distance sera le cosinus de la distance.

10. – PARATAXIES.

Un premier groupe de déplacements s'obtient en multipliant le verseur représentatif des divers points de l'espace par un verseur fixe. Nous appellerons ces déplacement des parataxies, parataxies à gauche si la multiplication est faite à gauche, parataxies à droite si elle est faite à droite.

Désignons par

$$e^{a\alpha} \quad , \qquad e^{a'\alpha'}$$

deux points quelconques de l'espace, Soit $e^{c\gamma}$ le verseur fixe et $e^{b\beta}$ et $e^{b'\beta'}$ les deux points en lesquels les points $e^{a\alpha}$ et $e^{a'\alpha'}$ sont transformés par une parataxie à gauche, nous aurons

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma}\, e^{a\alpha} \qquad e^{b'\beta'} = e^{c\gamma}\, e^{a'\alpha'}$$

Si I′ désigne l'invariant de distance après transformation nous avons à vérifier que $I' = I$. Il vient

$$2I = e^{b\beta}\, e^{-b'\beta'} + e^{b'\beta'} e^{-b\beta}$$

On a pour les conjugués

$$e^{-b\beta} = e^{-a\alpha}\, e^{-c\gamma}$$

et

$$e^{-b'\beta'} = e^{-a'\alpha'} e^{-c\gamma}$$

obtenu en prenant le produit des conjugués dans l'ordre inverse il vient ainsi

$$I' = e^{c\gamma}\; I\, e^{-c\gamma}$$

qui se réduit à I puisque I est un scalaire qui peut tout aussi bien être inscrit en tête du produit.

De ce que le produit de deux verseurs est un verseur résulte que les parataxies à gauche forment un groupe.

Pour les parataxies à droite, nous aurons de même

$$e^{b\beta} = e^{a\alpha}\; e^{c\gamma}$$

$$e^{b'\beta'} = e^{a'\alpha'}\, e^{c\gamma}$$

et donc

$$2I' = e^{a\alpha}\; e^{c\gamma}\; e^{-c\gamma}\; e^{-a'\alpha'} + e^{a'\alpha'}\; e^{c\gamma}\; e^{-c\gamma}\; e^{-a\alpha} = 2I$$

Les parataxies à droites sont donc aussi des déplacements et forment un groupe de déplacements.

11. – Homogénéité de l'espace.

Un verseur dont le vecteur est nul se réduit au scalaire un. Nous appelerons le point correspondant l'origine.

Tout point peut être transformé en l'origine par une parataxie à droite ou à gauche. Il suffit de prendre pour symbole de la parataxie le verseur conjugé au symbole du point à transporter à l'origine. Pour $e^{c\gamma} = e^{-a\alpha}$ on a en effet $e^{b\beta} = 1$.

Il résulte de ceci que l'espace considéré est homogène puisqu'il existe des déplacements qui transportent tout point à l'origine.

12. – Rotation.

Si on effectue successivement une parataxie à gauche et une parataxie à droite ayant comme symbole le verseur conjugué à celui de la parataxie à gauche, on obtient évidemment un déplacement, c'est à dire une transformation qui conserve l'invariant de distance. Cette transformation transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en un point $e^{b\beta}$ par la formule

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma}\, e^{a\alpha}\, e^{-c\gamma}$$

Si $e^{a\alpha}$ est l'origine $e^{b\beta}$ sera aussi l'origine. La transformation conserve donc l'origine, nous dirons que c'est une rotation autour de l'origine.

13. – Droites.

Ceci nous permet de définir une droite comme une axe de rotation.

Les points qui sont conservés par la rotation sont compris dans l'expression

$$e^{c'\gamma}$$

où c' peut prendre une valeur arbitraire.

Cette expression pour c' variable est dont l'équation d'une droite passant par l'origine.

En déplaçant l'origine par une parataxie, on obtiendra l'équation d'une droite passant par le point dans lequel la parataxie a transformé l'origine.

14. – Droites paratactiques.

Les parataxies de même espèce (c'est à dire toutes à droites ou toutes à gauche) de direction fixe γ, mais de paramètre c quelconque forment un groupe, sous-groupe du groupe de parataxies ceci résulte de ce que

$$e^{c\gamma}\, e^{c'\gamma} = e^{(c+c')\gamma}$$

de telle façon que les deux parataxies de paramètre c et c' effectuées successivement dans un ordre quelconque sont équivalentes à une parataxie unique de paramètre

$$c'' = c + c'$$

Ce groupe particulier conserve la droite $e^{c\gamma}$ (c variable) c'est à dire transforme les points de cette droite en des points de la même droite.

Ce groupe conservera (même s'il s'agit de parataxies à gauche), toutes les droites

$$e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$$

(c variable, γ, x, ξ fixes.)

Pour diverses valeurs de x et ξ mais même valeur de γ, ces droites sont dites paratactiques entres elles (à gauche).

De même les droites

$$e^{x\xi}\, e^{c\gamma}$$

(c seul variable) sont conservées par les parataxies à droite et se sont des paratactiques à droite.

15. – Distances.

Considérons encore deux parataxies à gauche de direction γ et de paramètres c et c', effectuées successivement.

La première transforme l'origine en le point $e^{c\gamma}$. La seconde transforme ce point en $e^{(c+c')\gamma}$.

Lorsque nous avons trois points en ligne droite, la longueur du segment total doit être la somme des longueurs des segments partiels. La longueur d'un segment est la distance des extrémités, c'est à dire une fonction de l'invariant de distance pour ces deux points. L'invariant est $\cos c$ et $\cos c'$ pour les segments partiels et $\cos c''$ pour le segment total.

c, c', c'' sont donc des fonctions des invariants de distance et puisque

$$c'' = c + c'$$

ce sont des fonctions additives.

Pour un choix convenable de l'unité de longueur, c, c' et c'' sont donc les distances elles-mêmes.

16. – Droites perpendiculaires.

Considérons deux droites passant par l'origine, soit

$$e^{x\xi}$$

pour x variable et

$$e^{y\eta}$$

pour y variable.

Supposons en outre que les directions ξ et η sont perpendiculaires entre elles; nous nous proposons de montrer que les deux droites sont perpendiculaires.

Ceci peut paraître évident, mais en réalité cela doit être démontré. En effet les directions ont été introduites sans référence à l'espace sphérique et à son invariant de distance.

Nous définirons l'angle droit, comme dans Euclide, par la condition que l'angle est égal à l'angle adjacent obtenu en prolongeant un des côtés. Autrement dit, il doit exister un déplacement (une rotation) qui transforme la première droite en la seconde et la seconde en la droite opposée à la première.

Le calcul est fort élémentaire, mais nous le donnons en détail à titre d'exemple de ce type de calcul.

Puisque les directions ξ et η sont perpendiculaires, il existe une direction ζ telle que

$$\zeta = \xi\eta = -\eta\xi$$

Considérons alors la rotation

$$e^{b\beta} = e^{\frac{\pi}{4}\zeta}\, e^{a\alpha}\, e^{-\frac{\pi}{4}\zeta}$$

qui transforme un point quelconque $e^{a\alpha}$ en $e^{b\beta}$. Nous devons montrer que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{x\xi}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{x\eta}$ et que si nous posons $e^{a\alpha} = e^{y\eta}$, nous obtenons $e^{b\beta} = e^{-y\xi}$.

Dans le premier cas, nous avons

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2}(1+\zeta)\, e^{x\xi}(1-\zeta) = \frac{1}{2}(1+\zeta)(1-\zeta)\cos x + \frac{1}{2}(1+\zeta)\xi(1-\zeta)\sin x$$

Mais

$$(1+\zeta)(1-\zeta) = 2$$

et

$$(1+\zeta)\xi(1-\zeta) = (1+\zeta)^2\xi = 2\zeta\xi = 2\eta$$

il vient donc

$$e^{b\beta} = \cos x + \eta \sin x = e^{x\eta}$$

Dans le second cas

$$e^{b\beta} = \frac{1}{2}(1+\zeta)\, e^{y\eta}(1-\zeta) = e^{-x\xi}$$

la calcul est le même, γ remplaçant ξ, mais

$$\zeta\eta = -\xi$$

17. – Rectangles gauches.

Soit $e^{c\gamma}$ un point fixe; alors pour x et y variables et ξ perpendiculaire à η

$$e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$$

et

$$e^{c\gamma}\, e^{y\eta}$$

représentent deux droites perpendiculaires entre elles.

En particulier si $\eta = \gamma$, la seconde

$$e^{(c+y)\gamma}$$

est une droite qui passe par l'origine, c'est la droite joignant l'origine au point $e^{c\gamma}$. La première droite est la paratactique à gauche à la droite $e^{x\xi}$ passant par le point fixe $e^{c\gamma}$.

Comme la droite $e^{x\xi}$ est aussi perpendiculaire à la droite $e^{(c+y)\gamma}$ nous voyons que les deux paratactiques $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$ admettent une perpendiculaire commune.

Effectuons une parataxie à droite de symbole $e^{x'\xi}$ (x' fixe) les deux droites $e^{x\xi}$ et $e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$, paratactiques à gauche, se transforment chacunes en elles mêmes et la perpendiculaire commune se déplace en conservant la même longueur.

La figure formée par les deux paratactiques et les deux perpendiculaires communes est donc un rectangle, en ce sens que c'est un quadrilataire dont les angles sont droits et les côtés opposés égaux chacun à chacun. Mais ce n'est pas une figure plane, c'est un rectangle gauche (au sens de l'anglais « skew »).

18. – Surface de Clifford.

On appelle surface de Clifford, le lieu des droites paratactiques à une même droite, dite axe de la surface, et telles que la perpendiculaire commune avec l'axe ait une même longeur dite rayon de la surface.

Considérons d'abord des paratactiques à gauche; les points la surface de Clifford d'axe

$$e^{x\xi}$$

(x variable) sont

$$e^{c\gamma}\; e^{x\xi}$$

où c est le rayon de la surface et où x est variable ainsi que la direction γ qui peut représenter toute direction perpendiculaire à ξ.

Pour des paratactiques à droite, on aurait de même

$$e^{x'\xi}\; e^{c\gamma'}$$

Les deux expressions sont égales, si on pose

$$x' = x \qquad\qquad e^{c\gamma'} = e^{-x\xi}\, e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$$

c'est à dire

$$\gamma' = e^{-x\xi}\,\gamma\, e^{x\xi}$$

Ceci montre que le lieu des paratactiques à droite est le même que celui des paratactiques à gauche.

La surface de CLIFFORD est le lieu des points à distance constante c de l'axe de la surface. C'est une surface réglée qui admet deux systèmes de génératrices, les paratactiques à gauche et à droite à l'axe de la surface.

Si on effectue des déplacements paratactiques qui conservent l'axe, la surface de CLIFFORD se transforme en elle-même, les génératrices d'un système se transforment en elles-mêmes et les génératrices de l'autre système se permutent.

Deux couples de génératrices de chacun des deux systèmes forment donc des parallélogrammes, les angles sont égaux ou supplémentaires et les côtés opposés sont égaux.

L'angle de ces parallélogrammes se calcule aisément; en effet les deux génératrices passant par le point $e^{c\gamma}$ sont

$$e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$$

(x variable) et

$$e^{x'\xi}\, e^{c\gamma}$$

(x' variable). Une parataxie à gauche de symbole $e^{-c\gamma}$ amène le sommet de l'angle à l'origine, les droites se tranforment en

$$e^{x\xi}$$

et

$$e^{-c\gamma}\, e^{x'\xi}\, e^{c\gamma}$$

qui se transforment l'une dans l'autre par une rotation d'angle $2c$.

Peut-être ce dernier point n'est-il pas parfaitement éclairci, nous y reviendrons dans un instant après avoir étudié le plan.

19. – DROITES CONJUGUÉES.

Dans le cas particulier où $c = \frac{\pi}{2}$ on a

$$e^{c\gamma} = \gamma$$

et donc, puisque γ et ξ sont supposés perpendiculaires

$$e^{x'\xi}\,\gamma = \gamma\, e^{-x'\xi}$$

les deux paratactiques, celle à droite et celle à gauche sont donc identiques. Leurs points correspondent pour

$$x' = -\,x$$

Considérons un point quelconque sur la droite

$$V' = e^{x'\xi}\gamma$$

(c'est à dire une valeur particulière de la variable x') et un point quelconque sur la droite

$$V = e^{x\xi}$$

Ces deux droites sont paratactiques à droite pour le cas exceptionnel $c = \frac{\pi}{2}$.

Nous allons montrer que ces deux points quelconques sont à la même distance $\frac{\pi}{2}$ c'est à dire que leur invariant de distance est nul. On a en effet

$$I = \frac{1}{2}(VV' + V'V) = \frac{1}{2}e^{x\xi}(-\gamma)e^{-x'\xi} + \frac{1}{2}e^{-x'\xi}\gamma e^{-x\xi} = \frac{1}{2}[-e^{(x+x')\xi}\,\gamma + e^{(x'+x)\xi}\,\gamma] = 0$$

On montrerait facilement que la droite joignant V et V' c'est à dire tout droite coupant les deux droites v et v' (pour x et x' variables) est perpendiculaire commune à ces deux droites. Mais sans doute avons-nous donné assez d'exemples de ces calculs.

Les droites paratactiques pour $c = \frac{\pi}{2}$ sont dites conjuguées ou polaires absolues.

20. – Plan.

Le plan peut être défini comme le lieu des droites perpendiculaires à une même droite

$$e^{c\gamma}\, e^{x\xi}$$

(x variable)

Les points du plan sont donc représentés par les verseurs

$$V = e^{c\gamma}\, e^{y\eta}$$

y est arbitraire et η aussi mais perpendiculaire à ξ.

Nous allons montrer que le plan est le lieu des points situés à la distance $\frac{\pi}{2}$ d'un point

$$V' = e^{c\gamma}\, \xi$$

appelé centre du plan.

Il nous faut vérifier que l'invariant de distance des deux points V et V′ est nul. Nous avons

$$I = \frac{1}{2}(V\,V' + V'\,V) = \frac{1}{2} e^{c\gamma}\, e^{y\eta}\,(-\xi)\, e^{-c\gamma} + \frac{1}{2} e^{c\gamma}\, \xi\, e^{-y\eta}\, e^{-c\gamma}$$

qui est bien nulle, puisque pour $\xi\eta = -\eta\xi$ on a

$$\xi\, e^{-y\eta} = e^{y\eta}\, \xi$$

On peut mettre en évidence dans l'équation du plan, le verseur V′ représentant le centre

Posant

$$\zeta = \xi\eta$$

on a

$$V = V'(-\xi)\, e^{y\eta} = V'(-\xi \cos y - \zeta \sin y) = V'\chi$$

Il est facile de ce rendre compte que χ est une direction et une direction arbitraire. En effet c'est la direction dont les projections orthogonales sur les directions $-\xi$ et $-\zeta$ sont respectivement $\cos y$ et $\sin y$. χ est donc dans le plan de ξ et ζ et fait un angle y avec $-\xi$. Mais η est une direction arbitraire perpendiculaire à ξ et y est arbitraire donc χ est arbitraire.

En particulier si le centre est à l'origine, nous voyons que les directions représentent les points d'un plan, c'est à dire d'une sphère de rayon $\frac{\pi}{2}$ centrée sur l'origine.

Comme les théorèmes familiers qui montrent que les angles au centre sont mesurés par l'arc intercepté sur la sphère s'appliquent sans modification, il s'en suit que l'angle de deux droites issues du centre $e^{x\xi}$ et $e^{y\eta}$ est la distance des deux directions ξ et η.

Lorsque les verseurs se réduisent à des directions, l'invariant de distance se réduit au produit scalaire des deux directions. L'angle des deux droites est donc l'angle des directions de ces droites.

En particulier, dans une rotation

$$e^{b\beta} = e^{c\gamma}\, e^{a\alpha}\, e^{-c\gamma}$$

on a pour $a = b = \dfrac{\pi}{2}$

$$\beta = e^{c\gamma}\, \alpha\, e^{-c\gamma}$$

et si α est perpendiculaire à γ

$$\beta = e^{2c\gamma}\alpha = \alpha \cos 2c + \gamma\alpha \sin 2c$$

β a donc tourné d'un angle $2c$ dans le plan perpendiculaire à γ.

Ceci achève de justifier la fin du paragraphe 18.

21. – Points antipodes.

Lorsque x varie de zéro à 2π, l'expression

$$e^{x\xi}$$

représente successivement les divers points d'une droite en partant de l'origine et en y revenant pour parcourir ensuite dans le même ordre les points déjà parcourus. On a en effet

$$e^{(x+2\pi)\xi} = e^{x\xi}$$

La droite est donc une ligne fermée dont la longueur est égale à 2π.

Si nous considérons toutes les droites passant par l'origine c'est à dire lorsque nous considérons différentes valeurs de la direction ξ, nous voyons que pour $x = \pi$ toutes ces droites passent par le point -1.

Ce point est dit le point antipode de l'origine.

Si nous considérions de même des droites passant par un point $e^{c\gamma}$ nous verrions que toutes ces droites passent par le point $-e^{c\gamma}$ point antipode de $e^{c\gamma}$.

Les points antipodes sont donc représentés par des verseurs de signes opposés, toute droite passant par un point passe aussi par le point antipode de ce point.

22. – Espace elliptique.

Si, au lieu de l'invariant de distance I, nous avions pris comme invariante distance I^2 ou la valeur absolue de I, alors deux verseurs V et $V' = -V$ auraient comme invariant de distance plus un. Au lieu de les considérer comme représentant des points distincts de l'espace, les points antipodes, on devrait les considérer comme deux représentations d'un seul et même point de l'espace.

A part cette circonstance relative à la disparition des points antipodes, toutes les formules établies pour l'espace sphérique demeurent valables pour le nouvel espace.

Celui-ci est appelé l'espace *elliptique*.

Certains auteurs l'appelle pourtant espace simplement elliptique de façon à laisser au terme « espace elliptique » un sens générique qui s'applique à l'un et l'autre des deux espaces considérés comme des « formes » diverses de l'espace elliptique.

23. – Représentation euclidienne de l'espace elliptique.

Remarquons tout d'abord, que des figures infiniment petites de l'espace elliptique peuvent, à la limite, être considérés comme des figures euclidiennes.

Ceci apparaît déjà dans le fait que l'angle de gauchissement du rectangle gauche est égal au côté; il tend donc vers zéro si ce côté est infiniment petit et alors le rectangle devient plan et la géométrie euclidienne.

On peut aussi montrer que lorsque x, y, z et x', y', z' sont infiniment petits, l'invariant de distance I, devient en négligeant les quantités d'ordre supérieur au second

$$I = 1 - \frac{1}{2}\left[(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\right] + \dots$$

comme I est le cosinus de la distance r, celle-ci est à la même approximation égale à la valeur euclidienne

$$r^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

Nous pouvons utiliser cette remarque, pour représenter la totalité de l'espace elliptique, dans une sphère de rayon infiniment petit ε. Notons que, par exception nous employons cette lettre grecque, dans son sens traditionnel d'un scalaire infiniment petit.

Un point

$$e^{x\xi}$$

pourra être représenté à l'intérieur de la sphère par le point

$$e^{x'\xi} = e^{\varepsilon x\xi}$$

soit, en négligeant les termes en ε^2 par le point

$$1 + \varepsilon x \xi$$

Comme la géométrie peut être considéré comme euclidienne dans la sphère, nous aurons, en prenant ε comme unités des longueurs euclidiennes, qu'un point de l'espace elliptique $e^{x\xi}$ est représenté par un vecteur euclidien de direction ξ et de longueur x.

Nous obtenons tous les points de la droite en considérant toutes les valeurs de x de moins $\frac{\pi}{2}$ à plus $\frac{\pi}{2}$ Les points extrêmes représentés sur la sphère de rayon $\frac{\pi}{2}\varepsilon$ sont les points antipodes de cette sphère et représenteraient les points antipodes de l'espace si nous considérons l'espace sphérique. Comme nous considérons l'espace elliptique ces deux points son deux représentations d'un même point de l'espace elliptique.

Tous les points de cet espace sont donc représentés à l'intérieur de notre sphère euclidienne et les points situés sur la frontière de la représentation y sont représentés deux fois.

On n'a donc jamais de difficulté à suivre sur la représentation un contour qui en atteint le bord, puisque tous les points du bord ont deux représentations de telle façon que, au lieu de sortir de la sphère, on peut toujours passer à l'autre représentation du même point et continuer à cheminer vers l'intérieur de la sphére.

24. – Représentation de l'espace sphérique.

On peut utiliser une représentation analogue pour l'espace sphérique. On suppose maintenant qu'à l'intérieur de la sphère, il y a deux sortes de points. Nous dirons les points bleus et les points roses. Les points de la frontière ne sont pas plus d'une espèce que de l'autre. Nous dirons que ce sont des points mauves.

Nous supposerons qu'on ne peut passer d'un point rose à un point bleu que par l'intermédiaire d'un point mauve.

En d'autres termes, il y a, à l'intérieur de la sphère, deux espaces distincts, l'espace bleu et l'espace rose et ces deux espaces sont raccordés par la frontière mauve, surface de la sphère.

Cette représentation peut être modifiée de diverses façons qui en respectent la topologie en la faisant resembler aux projections de la sphère, telle que la projection stéréographique ou la projection orthogonale. Mais ces dévelopements nous entraineraient en dehors de notre sujet.