

UNA CARATTERIZZAZIONE GEOMETRICA DELLE VARIETÀ ARITMETICAMENTE NORMALI (*)

FEDERICO GAETA

SUMMARY. — Auctor determinat quae condicio necessaria sit, eademque sufficiat, ut ex eo quod systema lineare, a formis ordinis $l(\geq 2)$ super aliquam algebraicam varietatem sectum, completum sit, concludi possit completum esse etiam systema quod secetur a formis ordinis $l-1$.

Scopo di questa Nota è di stabilire il seguente teorema:

Se V_d è una varietà algebrica irriducibile appartenente allo S_r , sulla quale le forme di un dato ordine $l(\geq 2)$, seghino un sistema lineare completo, condizione necessaria e sufficiente affinché lo stesso accada per le forme di ordine $l-1$, è che sopra un qualunque iperpiano le forme d'ordine l per V_d seghino un sistema lineare completo ⁽¹⁾.

Supporremo (come si può senza restrizione) che lo S_{r-1} scelto sia quello d'equazione $x_0 = 0$.

La condizione è sufficiente. Le forme F^l per $\bar{V} = (V_d, S_{r-1})$ seghino sopra V_d , fuori di \bar{V} , un sistema lineare completo, contenente totalmente il sistema staccato su V_d dalle F^{l-1} . Bisogna provare che ogni varietà M di questo sistema è segabile con una F^{l-1} . Infatti, $M + \bar{V}$ è la completa intersezione di V_d con una F^l d'equazione $f_1 = 0$, segante l'iperpiano $x_0 = 0$ in una V_{r-2}^l , che per ipotesi, è sezione di un'altra forma d'ordine l , $f_2 = 0$, passante per V_d .

(*) Nota presentata dall'Accademico Pontificio Francesco Severi nella Tornata dell'8 febbraio 1948.

(1) Per le curve ($d=1$) il teorema fu enunciato senza dimostrazione dal prof. SEVERI nel Seminario dell'Istituto di Alta Matematica in Roma. Vedi anche per un teorema dello stesso tipo: F. SEVERI, *Serie sistemi d'equivalenza e corrispondenze algebriche sulle varietà algebriche* (a cura di F. CONFORTO ed E. MARTINELLI, Roma, Cremonese 1942), pag. 371-372.

Nel fascio $f_1 + \lambda f_2 = 0$, la cui forma generica passa per $M + \bar{V}$, esiste una forma spezzata in $x_0 = 0$ ed in un'altra $g = 0$ d'ordine $l-1$. Pertanto $g = 0$ sega completamente V_a nella varietà M .

La condizione è necessaria. Sia V_{r-2}^l una varietà $(r-2)$ -dimensionale d'ordine l dell'iperpiano $x_0 = 0$ passante per \bar{V} . Se non ci sono F^l per V_a seganti $x_0 = 0$ nella V_{r-2}^l , ogni forma $f_1 = 0$, d'ordine l , per V_{r-2}^l segherà V_a ulteriormente, fuori di \bar{V} , in una varietà M segabile completamente, per ipotesi, con una forma $g = 0$ d'ordine $l-1$. Allora, $f_1 = 0$ e $x_0 g = 0$ segano V_a nella stessa varietà $\bar{V} + M$. Quindi, una certa combinazione lineare $f_1 + \lambda x_0 g = f_2$ contiene V_a . Evidentemente $f_2 = 0$ sega $x_0 = 0$ nella V_{r-2}^l , contro l'ipotesi che non vi sieno forme siffatte passanti per V_a .

Segue come corollario che se la V_a gode della proprietà che esista un numero naturale λ tale che le forme d'ordine $l \geq \lambda$ seghino su V_a un sistema lineare completo, allora, le forme d'ordine $l \geq \lambda + 1$ contenenti V_a segano sopra ogni iperpiano S_{r-1} un sistema completo.

2. — È ora opportuno qualche raffronto fra il teorema dimostrato e taluni recenti risultati di algebra moderna. ZARISKI chiama *varietà normali* (in senso aritmetico) quelle V irriducibili per le quali l'anello $K[\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r]$ è integralmente chiuso nel suo corpo quoziente, essendo K il corpo fondamentale e $\eta_0, \eta_1, \dots, \eta_r$ le coordinate omogenee del punto generico di V ⁽¹⁾. Queste varietà sono altresì normali nel senso algebrico-geometrico, ma il reciproco non è vero. H. T. MOHLY ⁽²⁾ caratterizza le varietà aritmeticamente normali come quelle V sulle quali le forme d'ogni ordine l segano un sistema lineare completo.

Lo stesso ZARISKI ha introdotto il concetto di *varietà localmente normale* come segue:

Una varietà irriducibile V è localmente normale lungo una sotto-varietà irriducibile W quando l'anello quoziente $Q(W)$ è integralmente

⁽¹⁾ O. ZARISKI, *Some results in the arithmetic theory of algebraic varieties* (« American Journal of Mathematics », vol. 41, 1939), pag. 282.

⁽²⁾ H. T. MOHLY, *A remark on normal varieties* (« Annals of Mathematics », vol. 42, 1941), pag. 921.

chiuso nel suo corpo quoziente⁽¹⁾; V è localmente normale quand'è localmente normale in tutti i suoi punti

ZARISKI osserva poi che le varietà prive di singolarità sono sempre localmente normali epperò le varietà localmente normali si possono caratterizzare come quelle per le quali sono completi i sistemi tagliati dalle forme da un certo ordine λ in poi.

P. DUBREIL, alla sua volta, chiama *varietà di prima specie*, quelle varietà pure (non necessariamente irriducibili) tali che le forme d'ogni ordine l del loro ambiente passanti per V_a segano sopra un iperpiano S_{r-1} , non contenente nessuna parte irriducibile di V_a , il sistema completo delle V_{r-2}^l per (V_a, S_{r-1}) ⁽²⁾.

D'accordo con questa nomenclatura il corollario del numero precedente dice:

Ogni varietà aritmeticamente normale è di prima specie. Una varietà localmente normale di prima specie è normale.

In particolare:

Per le varietà irriducibili e prive di punti multipli i concetti di varietà aritmeticamente normali e varietà di prima specie coincidono.

(1) O. ZARISKI, *Normal varieties and birational correspondences* («Bulletin of the American Mathematical Society», vol. 48, n. 6, 1942), pagg. 402-413. Se x_0, x_1, \dots, x_r sono le coordinate del punto generico di V , si chiama anello quoziente di una sottovarietà W di V , l'anello dei quozienti $f(n)/g(n)$ dove f e g sono forme dello stesso ordine in x_0, \dots, x_r e $g \neq 0$ in W .

(2) P. DUBREIL, *Quelques propriétés des variétés algébriques se rattachant aux théories de l'algèbre moderne* («Act. scientifiques et industrielles», 210, Exposé math. à la mém. de J. Herbrand, XII, Hermann, Paris, 1931).