PONTIFICIA
ACADEMIA
SCIENTIARVM

ACTA
Vol. X - N. 8
pag. 99-106

SULLA FORMA DI AVVOLGIMENTO E DI SVOLGIMENTO DI UNA FUNE DOTATA DI RIGIDEZZA ANELASTICA (*)

E. PISTOLESI
Accademico Pontificio

SVMMARIVM. — Quam formam sumat funis mere anelasticae rigiditatis, qui trochleae involvatur vel ex ea evolvatur, Auctor perquirit, legem experimentalem adhibens secundum quam a momento oneris erga funis axem pendet variatio curvaturae ipsius axis.

Si suole spiegare la rigidezza anelastica degli organi flessibili come una tendenza a conservare la curvatura originaria, dal che segue che il ramo che si avvolge resta discosto dal centro della carrucola di una distanza $R + \varepsilon_1 > R$ e quello che si svolge di una distanza $R - \varepsilon_2 < R$.

Vogliamo qui vedere quale forma assumono i due rami nell'ipotesi di rigidezza puramente anelastica. Per far questo occorre conoscere la legge che lega la variazione di curvatura al momento che la produce.

Riferendosi alle esperienze del GIOVANNOZZI (1), che forniscono la misura della rigidezza globale (allo svolgimento e all'avvolgimento) si ha che questa può essere posta con buona approssimazione nella forma:

$$X = X_1 + X_2 = m\,Q\left(\frac{d}{D}\right)^{4/3}.$$

(*) Nota presentata l'8 marzo 1946.

(1) R. GIOVANNOZZI, *Prove sulla rigidezza anelastica delle funi metalliche*, « Ricerche d'Ingegneria », Anno VIII, n. 4, luglio-agosto 1940.

dove Q è la forza applicata alla fune, d il diametro di questa, $D = 2R$ il diametro della carrucola, X_1 la rigidezza all'avvolgimento, X_2 quella allo svolgimento, X la rigidezza complessiva, m un coefficiente dipendente dal materiale e dalla struttura della fune (diametro dei fili elementari, tipo di avvolgimento). Ne risulta un momento complessivo (astraendo dalla differenza fra la forza motrice P e la resistenza Q):

$$(X_1 + X_2)R = mQ\left(\frac{d}{D}\right)^{4/3} R = (k_1 + k_2) Q R^{-1/3} .$$

Ammesso che un'espressione di questo tipo valga per le due rigidezze separatamente considerate si avrà:

[1 a] $$\varepsilon_1 = k_1 R^{-1/3}$$

[1 b] $$\varepsilon_2 = k_2 R^{-1/3}$$

Introdotta la curvatura $c = -\frac{1}{r}$ dell'asse della fune, si può adottare come legge plausibile che lega la variazione di curvatura al momento la seguente:

[2] $$M = kQ(c - c_0)^{1/3} .$$

Consideriamo dapprima il ramo che si avvolge. Inizialmente la curvatura è nulla: $c_0 = 0$; perciò:

$$c = \left(\frac{M}{kQ}\right)^3 .$$

Disposti gli assi come in figura 1 (a destra):

$$c = \left(\frac{Qy}{kQ}\right)^3 = 2\frac{y^3}{\alpha^4}$$

avendo posto $\alpha^4 = 2k^3$ (α ha le dimensioni di una lunghezza) e, adottando la consueta approssimazione $c = y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$:

[3] $$y'' = 2\frac{y^3}{\alpha^4} .$$

Moltiplicando per y' ambedue i membri e integrando si ha:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^4}{2\alpha^4} + \frac{C^2}{2}$$

dove la costante arbitraria C è il valore che y' ha per $y = 0$. Se ne deduce:

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}}$$

e quindi:

$$x = \int \frac{dy}{\sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}}} = \alpha^2 \int \frac{dy}{\sqrt{\alpha^4 C^2 + y^4}} \; . \tag{4}$$

La [4] conduce ad un integrale ellittico di prima specie. Se si pone come limite inferiore dell'integrale lo zero e si pone l'origine nel capo della fune, resta da determinare la costante C con la condizione che la fune abbia la curvatura $c_1 = \frac{1}{R}$ nel punto in cui è tangente alla puleggia.

Senza svolgere il caso generale, limitiamoci per semplicità al caso in cui il ramo pendente è lunghissimo (infinito) nel quale caso y' per $y = 0$ si può porre uguale a zero. Si ha allora $C = 0$ e

$$y' = \frac{y^2}{\alpha^2}$$

da cui, integrando:

$$y(x - C_1) = - \alpha^2$$

cioè la forma della fune è un'iperbole di cui l'asse x è un asintoto, mentre l'altro è parallelo all'asse y. Se facciamo passare l'asse y per il punto di contatto della fune con la puleggia, si ha per $x = 0$:

$$\delta = y = \frac{\alpha^2}{C_1} \; .$$

Ma per $y = \delta$ deve la curvatura c essere uguale a $c_1 = \frac{1}{R}$; perciò:

$$\frac{1}{R} = 2\frac{\delta^3}{\alpha^4} \; , \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}} = kR^{-1/3}$$

e confrontando con la formula precedente:

$$\frac{1}{R} = 2\frac{\alpha^2}{C_1^3}$$

$$C_1^3 = 2\alpha^2 R \; .$$

Il valore di y' risulta:

$$y' = \frac{\delta^2}{\alpha^2} = \sqrt[3]{\frac{\alpha^2}{4R^2}} \; .$$

Si ha infine: $\varepsilon_1 = \delta - \mu$ (v. figura), dove $\mu = R(1 - \cos\Theta) =$ $= 2R \operatorname{sen}^2 \frac{\Theta}{2} \cong \frac{1}{2} R\Theta^2$ dove per Θ si può mettere y' e quindi:

$$\mu = \frac{1}{4}\sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}}$$

ossia:

$$\mu = \frac{1}{4}\delta$$

$$\varepsilon_{1\infty} = \frac{3}{4}\delta = \frac{3}{4} kR^{-1/3}$$

dove l'indice ∞ sta a ricordare che si tratta del valore di ε_1 quand il ramo pendente della fune ha lunghezza infinita.

Confrontando con la [1a] si vede che occorre prendere $k = \frac{4}{3} k$

In generale si ha: per $y = \delta$,

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{\delta}{\alpha^4}} \quad , \qquad y'' = \frac{1}{R} = 2\frac{\delta^3}{\alpha^4}$$

e quindi:

$$y' = \sqrt{C^2 + \frac{\delta}{2r}}\ .$$

e posto nuovamente $\mu \cong \frac{1}{2} R y'^2$:

$$\varepsilon_1 = \delta - \mu = \frac{3}{4}\delta - \frac{1}{2} r C^2$$

(si ricordi che $C = y'$ per $y = 0$).

Per lo studio del ramo che si svolge occorre fare due casi distinti. Il primo si ha quando all'inizio dello svolgimento il ramo pendente è di lunghezza nulla. Allora la curvatura iniziale sarà $c_1 = \frac{1}{R}$ e la variazione di curvatura sarà effetto del momento secondo la [2].

Tenuto conto del segno della curvatura in relazione alla disposizione degli assi (fig. 2); si avrà (considerando le curvature in valore assoluto):

$$Q y = k\, Q (c_1 - c)^{1/3}$$

$$\frac{1}{R} - c = 2 \frac{y^3}{\alpha^4}$$

e infine, posto per approssimazione $c = -y''$:

$$y'' = 2 \frac{y^3}{\alpha^4} - \frac{1}{R}\ . \tag{5}$$

Col solito procedimento di integrazione si avrà:

$$\frac{y'^2}{2} = \frac{y^4}{2\alpha^4} - \frac{y}{R} + \frac{K^2}{2}$$

$$y' = \pm \sqrt{\frac{y^4}{\alpha^4} - 2\frac{y}{R} + K^2}$$

(K è il valore di y' per $y=0$) equazione che, integrata, conduce nuovamente ad integrali ellittici. Nella [6] il segno + vale per il tratto in cui y è crescente, il segno — per il tratto in cui y è decrescente, i due tratti risultando simmetrici rispetto all'ordinata passante per il punto in cui y è massimo.

Un caso particolare notevole si ha ponendo $y''=0$ per $y'=0$. Si ha allora, posto $y=\delta$:

$$\delta^3 = \frac{\alpha^4}{2R} \; ; \quad \delta = \sqrt[3]{\frac{\alpha^4}{2R}}$$

$$0 = \frac{\delta}{2R} - 2\frac{\delta}{R} + K^2$$

$$K^2 = \frac{3\delta}{2R}$$

e quindi, limitandosi al tratto in cui vale per il radicale il segno +:

$$y' = \frac{\sqrt{y^4 - 4\delta^3 y + 3\delta^4}}{\alpha^2} \; .$$

Il numeratore si può decomporre e scrivere:

$$y' = \frac{(y-\delta)}{\alpha^2}\sqrt{y^2 + 2\delta y + 3\delta^2}$$

e quindi:

$$x = \alpha^2 \int_0^y \frac{dy}{(y-\delta)\sqrt{y^2+2\delta y+3\delta^2}} \; .$$

Si vede che se l'integrale è esteso fra 0 e δ, x diventa infinito. La fune è composta di due metà simmetriche di lunghezza infinita. Questa soluzione può valere, per approssimazione, per fune molto lunga. L'integrale che dà la x è facilmente esprimibile con logaritmi.

Per $y=0$, $y'=\sqrt{\frac{3\delta}{2R}}$. Si ha poi:

$$\varepsilon_2 = \mu$$

dove:

$$\mu \cong \frac{1}{2} R\, y'^2 = \frac{3}{4} \delta$$

perciò:

$$\varepsilon_{2\infty} = \frac{3}{4} \delta_\infty = \varepsilon_{1\infty} \; .$$

In generale si ha che per $y = 0$, cioè nel punto di contatto della fune con la carrucola, $y' = K$ e quindi:

$$\varepsilon_2 = \mu \cong \frac{1}{2} R y'^2 = \frac{1}{2} R K^2$$

e poichè il massimo di K si ha precisamente nel caso precedentemente considerato (1), segue:

$$\varepsilon_2 \leqslant \frac{3}{4} \delta_\infty$$

$$\varepsilon_2 \leqslant \varepsilon_{1\infty} \; .$$

Il secondo caso è quello in cui inizialmente alla fune avvolta sulla carrucola fa seguito un tratto pendente rettilineo. Nel punto di raccordo dei due tratti si ha una discontinuità nella curvatura (da $\frac{1}{R}$ a zero) che si conserva nel seguito del movimento e la fune assume l'andamento indicato in figura 1 (a sinistra). Per il tratto BC vale la trattazione fatta per il ramo che si avvolge, ossia (tenuto conto dei segni in relazione ai sensi stabiliti sugli assi):

$$y' = -\sqrt{C^2 + \frac{y^4}{\alpha^4}} \quad ; \quad y'' = 2 \frac{y^3}{\alpha^4} \; .$$

---

(1) Infatti per $y = \delta$, $y'' \leqslant 0$ e quindi $\delta^3 \leqslant \frac{\alpha^4}{2R}$; ma si ha pure $y' = 0$ da cui

$$K^2 = \frac{2\delta}{R} - \frac{\delta^4}{\alpha^4} \, .$$

Il massimo di K^2 si ha per $\delta^3 = \frac{\alpha^4}{2R}$, cioè quando $y'' = 0$ per $y = \delta$.

Per $y = \delta_1$ (punto B)

$$y_1' = -\sqrt{C^2 + \frac{\delta_1{}^4}{\alpha^4}} \quad ; \quad y_1'' = 2\,\frac{\delta_1^3}{\alpha^4} \; .$$

Per il tratto BA valgono invece le formule [5] e [6]:

$$y_1' = -\sqrt{\frac{\delta_1{}^4}{\alpha^4} - 2\,\frac{\delta_1}{R} + K^2} \quad ; \quad y_1'' = 2\,\frac{\delta_1^3}{\alpha^4} - \frac{1}{R} \; .$$

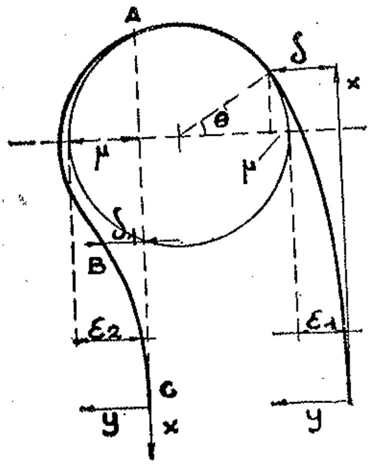

Fig. 1.

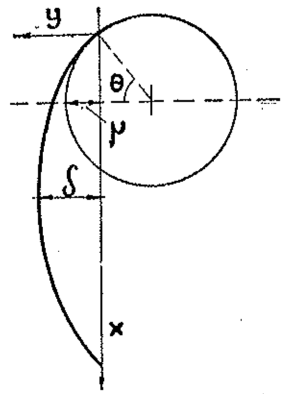

Fig. 2.

Poichè i due valori di y_1' debbono coincidere, segue:

$$K^2 = C^2 + 2\,\frac{\delta_1}{R} \; .$$

Questo è pure il valore di y'^2 per $y = 0$ e quindi:

$$\varepsilon_2 = \mu \cong \frac{1}{2}\,R y'^2 = \frac{1}{2}\,R C^2 + \delta_1 \; .$$

La fune si trova nelle condizioni del caso precedente con $K^2 = C^2 + 2\,\frac{\delta_1}{R}$. Se il tratto pendente inizialmente rettilineo è infinitamente lungo, $C = 0$ ed $\varepsilon_2 = \delta_1$, cioè il punto B dista di R dalla verticale condotta per il centro della puleggia.