

SULLA TEORIA DELLE ALI SOTTILI (*)

(Con quattro figure)

E. PISTOLESI

Accademico Pontificio

SYMMARIUM. — Demonstrat Auctor quomodo iam cognita alarum subtilium theoria compleri possit, ut alarum crassitudinis, quamvis parvae, ratio habeatur.

Tale assequitur Auctor propositum non tantum vortices, ut in vetere theoria, sed etiam fontes aut duplices fontes (quae italice «doppiette» dicuntur) distributas in chordis alarum apte disponendo.

Velocitatum campus circa alas earumque crassitudinis effectus in indefiniti biplani problemate reperiuntur.

Postremo breviter demonstrat Auctor quomodo proposita methodus in studio alarum magnae curvaturae adhiberi possit.

È nota la teoria delle ali sottili, elaborata con metodi diversi, ma con risultati concordanti, da BIRNBAUM, da MUNK e da GLAUERT; in essa si suppone sostituita l'ala da uno strato vorticoso (superficie di discontinuità per la velocità) disteso sulla porzione da $-l$ ad l dell'asse delle x , dal quale asse la linea del profilo si suppone pochissimo discosta. Le velocità indotte dai vortici dello strato si suppongono piccolissime rispetto alla velocità asintotica della corrente (che si suppone diretta secondo l'asse x o facente un piccolo angolo con esso) e la forma del profilo viene ad essere definita dalla direzione della tangente in ogni punto, quest'ultima essendo data dal quoziente della velocità verticale indotta v e della velocità asintotica V :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v}{V} ,$$

(*) Nota presentata il 29 aprile 1937.

In queste teorie il profilo alare è supposto infinitamente sottile. Ora in alcuni problemi tale supposizione conduce a risultati assai discosti dalla realtà, com'è accaduto allo scrivente di rilevare nello studio del problema della schiera alare obliqua; è opportuno pertanto mostrare come si possa senza difficoltà estendere le teorie suddette in modo da tener conto anche di uno spessore finito, sebbene piccolissimo, del profilo.

L'estensione che esporremo si riattacca al procedimento di GLAUERT, che è il più conveniente per la sua eleganza e semplicità.

1. - Si supponga che alla distribuzione di vortici sia associata, sul tratto da $-l$ a l dell'asse x , una distribuzione di sorgenti. Si indichi con $\gamma(x)$ la legge di distribuzione della vorticità, con $\varepsilon(x)$ la legge della distribuzione di sorgenti. Si supponga l'asse y rivolto verso il basso e l'asse x verso destra.

Posto:

$$\frac{x}{l} = -\cos \theta$$

si ponga, secondo GLAUERT:

$$\gamma = V \left(a_0 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} a_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

e, in modo analogo:

$$\varepsilon = V \left(b_0 \cos \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} b_n \operatorname{sen} n\theta \right).$$

La componente v secondo l'asse y della velocità indotta, ha in ogni punto del tratto considerato dell'asse x , una discontinuità, in quanto la sorgente εdx localizzata sul tratto dx induce una velocità $\frac{\varepsilon}{2}$ dalla parte delle y positive e una velocità $-\frac{\varepsilon}{2}$ dalla parte delle y negative. A queste si aggiunge la velocità indotta dai vortici, e mentre

questa definisce la forma dello « scheletro » o « linea media » del profilo, le velocità $\pm \frac{\varepsilon}{2}$ definiscono lo spessore di essa. Se indichiamo con y_1 e y_2 le ordinate del ventre e del dorso del profilo, con y l'ordinata della linea media, con v' la velocità indotta dai soli vortici, e si trascuri la velocità orizzontale indotta u rispetto a V , avremo:

$$[1] \quad \frac{dy}{dx} = \frac{v}{V} \quad \frac{dy_1}{dx} = \frac{v}{V} + \frac{\varepsilon}{2V} \quad \frac{dy_2}{dx} = \frac{v}{V} - \frac{\varepsilon}{2V}$$

Se la V è inclinata dell'angolo α sull'asse x , si dovrà aggiungere α a $\frac{v}{V}$.

La distribuzione di sorgenti ε non può essere arbitraria, giacchè il contorno del profilo deve essere chiuso e ciò richiede che sia soddisfatta la relazione (1):

$$\int_{-l}^l \varepsilon dx = 0$$

relazione che si trasforma facilmente nella seguente:

$$\int_0^\pi \left(b_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^\infty b_n \operatorname{sen} n\theta \right) \operatorname{sen} \theta d\theta = 0$$

ossia:

$$[2] \quad b_0 + \frac{b_1}{2} = 0$$

Se si suppone $\gamma = 0$, si ha il profilo a linea media rettilinea e senza incidenza. Il γ è responsabile dell'incidenza e della curvatura, mentre, come già si è detto, lo spessore dipende semplicemente da ε .

(1) Sarebbe forse interessante studiare il caso $\int \varepsilon dx \neq 0$ come rappresentazione del fenomeno del distacco.

Supponiamo che nella serie di ε ci siano soltanto i primi due termini, legati naturalmente dalla [2]. Si ha allora:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{b_0}{2} \left(\frac{1 + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta} - 2 \operatorname{sen} \theta \right) = \frac{b_0}{2} \frac{\cos 2\theta + \cos \theta}{\operatorname{sen} \theta}$$

e $\frac{dy_1}{dx}$ è ∞ per $\theta = 0$, cioè al lembo d'attacco, mentre $\frac{dy_1}{dx} = 0$ per $\theta = \pi$, cioè al lembo d'uscita. Integrando si ottiene:

$$[3] \quad y_1 = \frac{b_0}{2} l \left[\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} + \operatorname{sen} \theta \right] = \frac{b_0}{2} l \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta) .$$

È facile verificare che questo è il profilo JOUKOWSKI sottile simmetrico. In effetti questo è dato dalla trasformazione:

$$z = \frac{1}{2} \left\{ \zeta + \frac{l^2 (1 - k)^2}{\zeta} \right\}$$

dove $-kl$ è la distanza (piccolissima) fra l'origine e il centro del cerchio, essendo:

$$\zeta + kl = -le^{-i\theta} .$$

Sostituendo si ha:

$$z = -\frac{l}{2} \left\{ k + e^{-i\theta} + \frac{(1 - k)^2}{k + e^{-i\theta}} \right\}$$

e con facili trasformazioni, attesa la piccolezza di k :

$$z = -l \left\{ \cos \theta - ke^{i\theta} (1 + i \operatorname{sen} \theta) \right\}$$

da cui:

$$x = -l \left\{ \cos \theta - k (\cos \theta - \operatorname{sen}^2 \theta) \right\}$$

$$y = kl \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta)$$

ovvero:

$$\begin{aligned}x + kl &= -l \cos \theta [1 - k(1 + \cos \theta)] = \infty - l \cos \theta \\y &= kl \operatorname{sen} \theta (1 + \cos \theta).\end{aligned}$$

Si avrà pertanto la coincidenza col profilo definito dalla [3] ponendo $b_0 = 2k$.

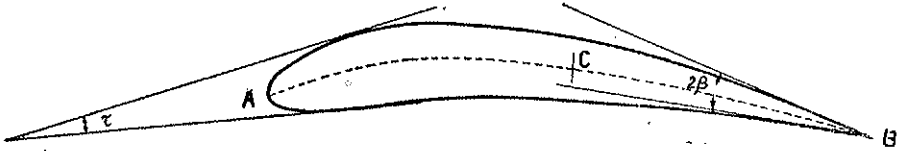


FIG. 1.

Il termine in $\operatorname{sen} 2\theta$ fornisce:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{b_2}{2} \operatorname{sen} 2\theta$$

da cui:

$$y_1 = \frac{b_2}{4} l \left(\operatorname{sen} \theta - \frac{1}{3} \operatorname{sen} 3\theta \right)$$

e analoghe formule forniscono gli altri termini della serie.

In generale si avrà:

$$[4] \quad b_n = \frac{4}{\pi} \int_0^\pi \frac{dy_1}{dx} \operatorname{sen} n\theta \, d\theta .$$

* Se indichiamo con τ (fig. 1) l'angolo (piccolo) che formano fra loro le tangenti in due punti corrispondenti dell'intradosso e dell'estradosso del profilo (positivo per vertice a sinistra), potremo scrivere:

$$[5] \quad b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \tau \operatorname{sen} n\theta \, d\theta .$$

2. - Si osservi che se lo sviluppo di ε ha un numero finito di termini, si ha sempre $\frac{dy_1}{dx} = 0$ per $\theta = \pi$, ossia $x = l$ (lembo d'uscita).

Se si vuole ivi avere un angolo $-\tau_b = 2\beta$ diverso da zero, senza far ricorso ad uno sviluppo infinito, basterà porre:

$$[6] \quad \varepsilon = 2V\beta \cos \theta .$$

La forma del profilo che vi è corrispondente è data da:

$$\frac{dy_1}{dx} = \beta \cos \theta$$

$$[7] \quad y_1 = \frac{1}{2} l\beta \sin^2 \theta .$$

Trattasi, com'è chiaro, di un profilo parabolico, che, data la piccola freccia, si confonde con l'arco di cerchio. Si ottengono così i profili di KÁRMÁN-TREFFTZ.

3. - In pratica potrà essere sufficiente porre:

$$[8] \quad \varepsilon = V \left\{ b_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \right) + 2\beta \cos \theta \right\}$$

dove il valore di β è fornito dall'angolo al vertice posteriore del profilo e b_0 si determina in base al valore τ_c dell'angolo τ nel mezzo del profilo mediante la formula:

$$[9] \quad b_0 = -\tau_c .$$

Si può quindi scrivere in definitiva:

$$[10] \quad \varepsilon = -V \left\{ \tau_c \left(\cos \frac{\theta}{2} - 2 \sin \theta \right) + \tau_b \cos \theta \right\} .$$

4. - La velocità orizzontale indotta dalle sorgenti in corrispondenza del tratto dell'asse x occupato dal profilo potrebbe calcolarsi esattamente nello stesso modo in cui si calcola la velocità verticale indotta dai vortici; ma la cosa non presenta, almeno per il momento, se non scarso interesse. La u infatti non fa che variare, in maniera, date le premesse, trascurabile, la distribuzione della portanza; mentre il valore complessivo di questa è sempre dato da:

$$P = \rho V \Gamma$$

essendo $\Gamma = \int \gamma dx$, e quindi indipendente dalla distribuzione della sorgente.

Altrettanto dicasi per quanto riguarda il momento.

Interessa invece conoscere l'andamento della velocità all'esterno del profilo.

Per quanto riguarda i vortici, posto $w = u - iv$, si ha:

$$w' = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\gamma dx'}{z - x'}$$

Per quanto riguarda le sorgenti:

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon dx'}{z - x'}$$

La presenza delle sorgenti equivale a dare a γ un valore complesso:

$$[11] \quad \bar{\gamma} = \gamma + i\varepsilon = V \left(c_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} c_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

con i c_n complessi. Si ha così:

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} dx'}{z - x'}$$

od anche, posto

$$[12] \quad z = -l \cos \theta$$

con θ complesso:

$$w = -\frac{i}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\bar{\gamma} \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

dove il punto θ non fa parte della linea percorsa da θ' , così che il denominatore non si annulla.

Ora vale in questo caso la formula:

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = -\frac{i\pi}{\operatorname{sen} \theta} e^{in\theta}$$

(dove θ deve essere determinato per continuità, variando da 0 a π sulla faccia positiva del profilo, da π a 2π sulla faccia negativa).

Si ha allora:

$$w = -\frac{iV}{2\pi} \left\{ c_0 (I_0 + I_1) + \frac{1}{2} \sum_1^\infty c_n (I_{n-1} - I_{n+1}) \right\}$$

$$[13] \quad w = \frac{V}{2} \left\{ -c_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} + i \right) + i \sum c_n e^{in\theta} \right\}$$

da cui, posto

$$\theta = \theta_1 + i\theta_2$$

si ricava, con facili calcoli (ricordando che $w = u - iv$):

$$u = \frac{V}{2} \left\{ -a_0 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} + b_0 \left(1 - \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) - \sum_1^\infty (a_n \operatorname{sen} n\theta_1 + b_n \cos n\theta_1) e^{-n\theta_2} \right\}$$

$$[14] \quad v = \frac{V}{2} \left\{ a_0 \left(1 - \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) + b_0 \frac{\operatorname{sen} \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} - \sum_1^\infty (a_n \cos n\theta_1 - b_n \operatorname{sen} n\theta_1) e^{-n\theta_2} \right\}.$$

Queste formule permettono di calcolare la velocità in un punto esterno al profilo ed in particolare di studiare il problema della mutua induzione dei multiplani.

A questo scopo occorre determinare il valore di θ che corrisponde ad un punto z . Si ha:

$$\frac{x + iy}{l} = -\cos \theta_1 \cosh \theta_2 + i \sin \theta_1 \sinh \theta_2$$

da cui:

$$\frac{x}{l} = -\cos \theta_1 \cosh \theta_2 \quad \frac{y}{l} = \sin \theta_1 \sinh \theta_2 .$$

Le linee $\theta_1 = \text{cost.}$ sono caratterizzate dall'equazione:

$$[15] \quad \frac{x^2}{l^2 \cos^2 \theta_1} - \frac{y^2}{l^2 \sin^2 \theta_1} = 1$$

e le linee $\theta_2 = \text{cost.}$ da:

$$[16] \quad \frac{x^2}{l^2 \cosh^2 \theta_2} + \frac{y^2}{l^2 \sinh^2 \theta_2} = 1 .$$

Tracciata la rete delle iperbole e delle ellissi omofocali definite dalla [15] e dalla [16], risultano determinati per ogni punto del piano il θ_1 e il θ_2 .

Anche senza il tracciamento materiale delle curve, si ha, valendosi delle proprietà dell'ellisse e dell'iperbole (fig. 2):

$$\begin{aligned} \rho_2 - \rho_1 &= 2l \cos \theta_1 \\ \rho_2 + \rho_1 &= 2l \cosh \theta_2 . \end{aligned}$$

Così, ad esempio, per un punto dell'asse x alla destra dell'estremo B è $\cos \theta_1 = -1$ e $\cosh \theta_2 = \frac{x}{l}$; per un punto a sinistra di A: $\cos \theta_2 = 1$ e $\cosh \theta_1 = -\frac{x}{l}$.

Per bene individuare i due parametri θ_1 e θ_2 osserviamo che supponendo il piano tagliato lungo AB, le iperbole $\theta_1 = \text{cost.}$ sono spezzate dal taglio; perciò le mezze iperbole situate nel semipiano positivo corrispondono a valori di θ_1 fra 0 e π ; quelle nel semipiano negativo a valori di θ_1 fra π e 2π . Le ellissi $\theta_2 = \text{cost.}$ sono invece continue e ogni ellisse corrisponde ad un determinato valore di θ_2 , che assumiamo positivo.

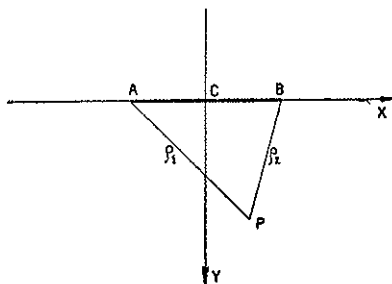


FIG. 2.

4. - È facile adesso vedere come possiamo utilizzare le cose precedenti per il calcolo approssimato dei biplani. Il procedimento ha analogie con quelli di BIRNBAUM, di FERRARI e di THEODORSEN, ma ne differisce per la considerazione dello spessore del profilo.

Ci varremo dei primi tre termini dello sviluppo di γ e di uno sviluppo di ϵ dato dalla [10].

A questo scopo è necessario prima determinare la velocità indotta dalla distribuzione di ϵ corrispondente al coseno:

$$\epsilon = V \cos \theta .$$

Si ha:

$$w = \frac{V}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\cos \theta' \sin \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

$$w = \frac{V}{2} \left[\frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \theta \ln \cot \frac{\theta}{2} \right) - i \cos \theta \right]$$

da cui, con complesso ma facile calcolo:

$$u = \frac{V}{2} \left\{ \frac{2}{\pi} \left(1 - \cos \theta_1 \cosh \theta_2 \ln \frac{\cosh \theta_2 + \cos \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} \right) - \right. \\ \left. - \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{senh} \theta_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} \right) \right\}$$

$$v = \frac{V}{2} \left\{ \frac{2}{\pi} \operatorname{sen} \theta_1 \operatorname{senh} \theta_2 \ln \frac{\cosh \theta_2 + \cos \theta_1}{\cosh \theta_2 - \cos \theta_1} + \right. \\ \left. + \cos \theta_1 \cosh \theta_2 \left(1 - \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{senh} \theta_2}{\operatorname{sen} \theta_1} \right) \right\} .$$

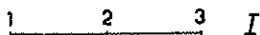


FIG. 3.

Ciò premesso, si potrà indicare con α''_{n1} ($n=1, 2, \dots, 6$) la velocità v indotta nel punto v (fig. 3) per a_{n1} (dell'ala inducente I) uguale ad 1 e $V=1$; in modo analogo si definisce α''_{nII} .

Ciò posto, se le ali sono sottili, ossia è trascurabile la distribuzione di sorgenti, e si indica con α_v l'incidenza « locale » nel punto v , si hanno le sei equazioni:

$$[17] \quad \alpha_v = \alpha''_{0I} a_{0I} + \alpha''_{1I} a_{1I} + \alpha''_{2I} a_{2I} + \alpha''_{0II} a_{0II} + \alpha''_{1II} a_{1II} + \alpha''_{2II} a_{2II} .$$

Queste sei equazioni permettono di determinare le sei incognite $a_{0I}, a_{1I}, a_{2I}, a_{0II}, a_{1II}, a_{2II}$.

Ma se le ali hanno un profilo, le cui caratteristiche supporremo semplicemente definite dagli angoli τ_{CI} , τ_{BI} , τ_{CH} , τ_{BH} e si indicano con β^r_{nI} e β^r_{nH} le velocità indotte nei punti r per $b_{nI} = 1$, $b_{nH} = 1$ e $V = 1$; con c^r_I , c^r_H le velocità indotte nei punti r da una distribuzione $\cos \theta$ sulle ali I e II rispettivamente, si avrà:

$$\begin{aligned}
 [18] \quad \alpha_r &= \dots (\beta^r_{0H} - 2\beta^r_{1H}) \tau_{CH} - c^r_H \tau_{BH} & (r = 1, 2, 3) \\
 \alpha_r &= \dots (\beta^r_{0I} - 2\beta^r_{1I}) \tau_{CI} - c^r_I \tau_{BI} & (r = 4, 5, 6)
 \end{aligned}$$

dove i puntini stanno a indicare i termini già scritti a secondo membro della [17] e le α_r si riferiscono alla linea media dei profili. In altre parole alle α_r dovremo, nelle [17] sostituire le somme che si ottengono portando al primo membro i termini scritti a secondo membro delle [18].

Poichè le circolazioni Γ_I e Γ_H dipendono dai coefficienti a_{nI} e a_{nH} , se ne deduce che lo spessore dei profili esercita un'influenza non trascurabile sulle caratteristiche del biplano.

Tralasciamo per brevità gli sviluppi interessanti a cui il metodo accennato potrebbe condurre.

5. - Il procedimento di GLAUERT può essere esteso anche in altro senso; e cioè al caso in cui la linea media dell'ala è fortemente curvata.

Indichiamo con $2l$ la corda del profilo e poniamo

$$\frac{z'}{l} = -\cos \theta \quad (\theta \text{ complesso})$$

essendo z' la coordinata complessa di un punto del profilo.

Posto

$$[19] \quad \bar{\gamma} = V \left(c_0 \cot \frac{\theta}{2} + \sum_1^{\infty} c_n \operatorname{sen} n\theta \right)$$

e

$$[20] \quad w = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} dz'}{z - z'} = -\frac{i}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\bar{\gamma} \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta}$$

si ottiene in corrispondenza del profilo (essendo l'integrazione effettuata lungo il profilo):

$$[21] \quad w = -\frac{iV}{2} \left(c_0 - \sum_1^{\infty} c_n \cos n\theta \right).$$

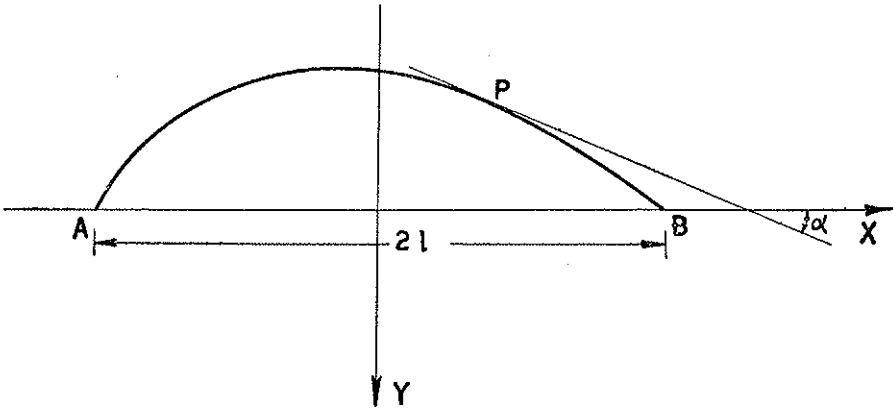


FIG. 4.

L'aver posto $\bar{\gamma} dz'$ come valore della singolarità inducente nel tratto considerato porta ad un valore $(\gamma + i\varepsilon) ds$ definito da:

$$\bar{\gamma} \frac{dx + i dy}{ds} = \gamma + i\varepsilon$$

ossia (fig. 4):

$$\bar{\gamma} (\cos \alpha + i \operatorname{sen} \alpha) = \gamma + i\varepsilon$$

e posto $\bar{\gamma} = \gamma_1 + i\gamma_2$:

$$\gamma_1 \cos \alpha - \gamma_2 \operatorname{sen} \alpha = \gamma$$

$$\gamma_1 \operatorname{sen} \alpha + \gamma_2 \cos \alpha = \varepsilon.$$

Se, ad esempio, vogliamo considerare il caso della semplice linea vorticosa, dovrà essere $\varepsilon = 0$, e quindi

$$\bar{\gamma} e^{i\alpha} = \gamma \qquad \bar{\gamma} = \gamma e^{-i\alpha} .$$

Dalla [21] si potranno dedurre le componenti u e v della velocità e allora il profilo sarà definito dalla relazione

$$[22] \qquad \operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx} = - \frac{v}{V + u}$$

relazione che potrà permettere di calcolare i coefficienti della serie [19]. Praticamente converrà limitare la serie ad un numero finito di termini, imponendo che la [22] sia soddisfatta in un corrispondente numero di punti del profilo dato.

6. - Occorre finalmente mostrare come lo studio del profilo sottile permetta di risolvere il problema di determinare le caratteristiche aerodinamiche di un profilo dato arbitrariamente.

Se il profilo non è sottile, ci si può ridurre a questo mediante una conveniente rappresentazione conforme. Infatti, secondo un procedimento adoperato da tutti gli autori che hanno studiato questo problema, si può, con una trasformazione inversa di quella di Joukowski, passare dal profilo ad una quasi-circonferenza e da questa, mediante un'altra trasformazione di Joukowski, ad un profilo quasi rettilineo e sottilissimo. A questo può allora senz'altro applicarsi il metodo esposto in questa Nota.

7. - Una presentazione, leggermente diversa dalla precedente dal punto di vista formale, ma sostanzialmente identica, del problema trattato è la seguente.

L'espressione della velocità indotta dal sistema di sorgenti

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{\varepsilon dx'}{z - \alpha'}$$

può trasformarsi, mediante integrazione per parti, nella seguente:

$$w'' = -\frac{1}{2\pi} \left[E(x') \frac{1}{z-x'} \right]_{-l}^l + \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{E(x') dx'}{(z-x')^2}$$

dove si è posto

$$E(x') = -\int_{-l}^{x'} \varepsilon dx' = \int_{x'}^l \varepsilon dx'$$

ossia $E(x')$ rappresenta il valore totale della sorgente distribuita sul tratto dell'asse x compreso fra il punto generico x' e l'estremo posteriore l .

Con le consuete convenzioni sul calcolo dell'integrale, poichè $E(x')$ è zero per $x'=l$, segue:

$$w'' = \frac{1}{2\pi} \int_{-l}^l \frac{E(x') dx'}{(z-x')^2}.$$

Il secondo membro rappresenta le velocità indotta da una distribuzione di doppiette con intensità di ripartizione E . Si può dunque, in luogo della distribuzione di sorgenti, supporre una distribuzione di doppiette. Oltre a ciò, dalle [1] si ricava, per quanto riguarda lo spessore s del profilo:

$$[23] \quad \frac{ds}{dx} = \frac{\varepsilon}{V}$$

da cui immediatamente:

$$[24] \quad s = -\frac{E}{V}$$

ossia lo spessore s è direttamente proporzionale alla intensità della distribuzione di doppiette in corrispondenza dell'ascissa considerata. Ciò permette di fare riferimento, nelle formule, allo spessore del profilo, anzichè all'angolo delle tangenti.

Al termine $b_0 \left(\cot \frac{\theta}{2} - 2 \operatorname{sen} \theta \right)$ corrisponde una distribuzione di doppiette

$$E_0 + E_1 = -V b_0 l \left(\operatorname{sen} \theta + \frac{\operatorname{sen} 2\theta}{2} \right)$$

corrispondente alla [3].

Al termine generico $b_n \operatorname{sen} n\theta$ corrisponde una distribuzione di doppiette

$$E_n = -\frac{V}{2} b_n l \left[\frac{\operatorname{sen} (n-1)\theta}{n-1} - \frac{\operatorname{sen} (n+1)\theta}{n+1} \right].$$

Infine alla distribuzione $2V\beta \cos \theta$ di sorgenti corrisponde una distribuzione di doppiette $-V\beta l \operatorname{sen}^2 \theta$, corrispondente alla [7].

In conclusione, potremmo adottare per la distribuzione di doppiette, una serie del tipo

$$[25] \quad E = -Vl [\Sigma B_n \operatorname{sen} n\theta + \beta \operatorname{sen}^2 \theta].$$

(Il termine in $\operatorname{sen}^2 \theta$ occorre ogni volta che si vuole avere un angolo β non nullo al bordo di uscita senza ricorrere ad una serie infinita).

Quanto al calcolo della velocità indotta da una doppietta proporzionale a $\operatorname{sen} n\theta$, basterà osservare (come si vede mediante un'integrazione per parti) che

$$I_n = \int_0^\pi \frac{\cos n\theta'}{\cos \theta' - \cos \theta} d\theta' = -\frac{1}{n} \int_0^\pi \frac{\operatorname{sen} n\theta' \operatorname{sen} \theta' d\theta'}{(\cos \theta' - \cos \theta)^2}$$

e perciò

$$w''_n = \frac{V}{2\pi} n B_n I_n.$$

Omettiamo per brevità gli ulteriori sviluppi che potrebbero facilmente trarsi da quanto detto.

Pisa, aprile 1937.